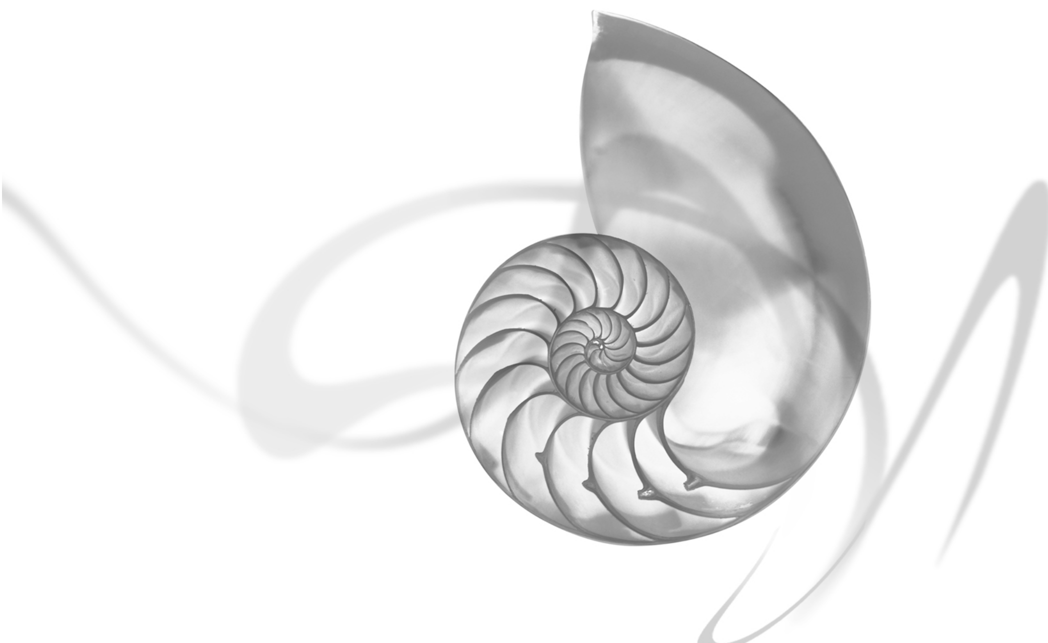
普通高等学校工科类·经管类数学深化训练与考研辅导丛书

微积分复习指导与深化训练

◆ 刘 强 贾尚晖 编著



電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书在作者多年来本科教学和考研辅导经验的基础上编写而成。全书共分为 9 章，每章包括 5 个模块，即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解及综合提高训练。本书编写的主要目的有两个：一是帮助学有余力的在校本科生更好地学习“微积分”课程，开阔学习视野，拓展解题思路；二是满足学生报考研究生的需要。因此本书编写紧扣数学三考研大纲，贴近考试实际，做到分门别类、详略得当，帮助考研学生在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧，提高综合分析问题、解决问题的能力，以达到融会贯通、举一反三的学习效果。

本书既可以作为普通高等院校工科类、经管类本科生学习“微积分”课程的深化训练用书，也可以作为全国硕士研究生统一入学考试的训练辅导用书。

图书在版编目（CIP）数据

微积分复习指导与深化训练 / 刘强，贾尚晖编著．—北京：电子工业出版社，2016.3

ISBN 978-7-121-28251-5

I．①微… II．①刘… ②贾… III．①微积分－高等学校－教材 IV．①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 042561 号

策划编辑：徐　颢
责任编辑：徐　颢
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：17.75　字数：460 千字
版　　次：2016 年 3 月第 1 版
印　　次：2016 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：39.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言

为了更好地帮助普通高等院校工科类、经管类本科生学好大学数学，同时为了满足众多考生考研的需要，我们结合多年的考研辅导经验，编写了“普通高等学校工科类、经管类数学深化训练与考研辅导丛书”，该丛书包括微积分、高等数学、线性代数、概率论与数理统计以及大学生数学竞赛等数学课程的训练辅导用书，由首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书主编。

本书为微积分分册，内容涵盖了考研“数学三”中关于微积分内容的全部考点。本书编写的主要目的有两个：一是帮助学有余力的在校学生更好地学习“微积分”课程，以开阔学习视野，拓展解题思路；二是满足学生报考研究生的需要，因此本书编写紧扣“数学三”考研大纲，贴近考试实际，做到分门别类、详略得当，帮助考研学生在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧，提升综合分析问题、解决问题的能力，以达到融会贯通、举一反三的学习效果。

全书共分为 9 章，每章包括 5 个模块，即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解及综合提高训练，具体模块内容为：

一、知识要点：本模块对基本概念、基本理论、基本公式等内容进行系统梳理，方便读者查阅相关内容。

二、典型例题分析：本模块是作者在多年来考研辅导经验的基础上，创新性地构思了大量有代表性的例题，并选编了部分国内外优秀教材、辅导资料的经典题目，汇集了一些有代表性的考研真题，按照知识结构、解题思路、解题方法等对典型例题进行了系统归类，通过专题讲解，详细阐述了相关问题的解题方法与技巧。

三、深化训练：本模块精心选编了部分具有代表性的习题以及历年的考研真题，帮助读者巩固强化所学知识，提升读者学习效果，做到举一反三、融会贯通。

四、深化训练详解：本部分对深化训练给出了详细的解答过程，部分习题给出多种解法，以开拓读者的解题思路，培养读者的分析能力和发散思维。

五、综合提高训练：本部分的例题综合性较强，有较高的难度和较强的灵活性，通过本模块的学习，有效提升读者的综合能力和应变能力。

为了便于读者阅读本书，书中有一定难度的结论、例题和综合练习题等将用“**”标出。另外为了方便读者查阅，本书在考研真题后面加上了标志，例如【2010（3）】表示该题是 2010 年硕士研究生入学考试“数学三”考题，【2010（1，3）】表示该题是 2010 年“数学一”和“数学三”考题，其余类推。

本丛书在编写过程中，得到了北京工业大学李高荣教授，首都经济贸易大学张宝学教授、马立平教授、吴启富教授，昆明理工大学吴刘仓教授，北京化工大学李志强副教授，以及同事们的大力支持，电子工业出版社的徐颢编辑和高教分社的谭海平社长也为丛书的出版付出了大量努力，在此表示诚挚的感谢。

本书既可以作为普通高等学校工科类、经管类本科生学习“微积分”课程的深化训练用书，也可以作为全国硕士研究生统一入学考试的辅导用书。

由于作者水平有限，书中仍可能存在不妥甚至错漏之处，恳请读者和同行们不吝指正。邮件地址为：cuebliuqiang@163.com。

编　者

2016 年 1 月

目　　录

第 1 章　函　　数

1.1　知 识 要 点

1.1.1　函数、邻域的概念

1．函数的概念

设数集$D \subset R$，如果存在一个对应法则f，使得对于每一个$x \in D$，都能由f唯一确定一个实数y与之对应，则称对应法则f为定义在实数集D上的一个函数，记作$y = f(x)$，其中，x称为**自变量**，y称为**因变量**，实数集D称为函数的**定义域**，也可记为$D(f)$或者D_f．集合$\{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$称为函数的**值域**，一般记为$Z(f)$或者$Z_f$．

定义域和对应法则是函数的两要素，值域由定义域和对应法则确定．两个函数相同的充要条件是定义域与对应法则分别相同．

函数的表示方法主要有公式法、图示法以及表格法等，其中公式法是函数关系表示的一种主要形式．

2．邻域的概念

设$x_0 \in R$，$\delta > 0$，称集合$\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$为点$x_0$的$\delta$**邻域**．在数轴上，它表示的是一个以点$x_0$为中心、长度为$2\delta$的开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$；称集合$\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$为点$x_0$的$\delta$的**去心邻域**（或**空心邻域**），其中开区间$(x_0 - \delta, x_0)$称为点x_0的左邻域，开区间$(x_0, x_0 + \delta)$称为点x_0的右邻域．

1.1.2　函数的基本特性

1．奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称，如果对于$\forall x \in D$，恒有$f(-x) = f(x)$，则称$f(x)$为**偶函数**；如果对于$\forall x \in D$，恒有$f(-x) = -f(x)$，则称$f(x)$为**奇函数**．

注：（1）奇函数的图像关于坐标原点对称；偶函数的图像关于y轴对称．

（2）函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，因此如果函数的定义域关于原点不对称，则该函数不具有奇偶性．

奇、偶函数的一些常用结论：

（1）常函数为偶函数；

（2）有限个奇函数的代数和为奇函数，有限个偶函数的代数和为偶函数；

（3）奇函数与偶函数的乘积为奇函数；

（4）奇数个奇函数的乘积为奇函数，偶数个奇函数的乘积为偶函数．

2．单调性

设函数 $f(x)$ 在某个区间 D 上有定义，对于 $\forall x_1, x_2 \in D$，且 $x_1 < x_2$，有

（1）若 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 单调增加（单调递增）;

（2）若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 单调减少（单调递减）.

3．周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对任意一个 $x \in D$，有 $(x \pm T) \in D$，且

$$f(x+T) = f(x)$$

恒成立，则称该函数为**周期函数**. T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**，满足上式的最小的正数 T_0 称为函数的**最小正周期**，通常我们所说的函数的周期指的是函数的最小正周期.

周期函数的一些常用结论：

（1）若 $f(x)$ 的周期为 T，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}(a \neq 0)$；

（2）若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期均为 T，则 $f(x) \pm g(x)$ 也是周期为 T 的周期函数.

4．有界性

设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，若存在正数 M，使得对于 $\forall x \in D$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**，否则称 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

函数的有界性还可以通过另外一种形式来定义.

若存在实数 a 和 b，使得对 $\forall x \in D$，恒有 $a \leqslant f(x) \leqslant b$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**，否则称 $f(x)$ 在 D 上**无界**，其中 a 称为函数的**下界**，b 称为函数的**上界**.

1.1.3　反函数与复合函数

1．反函数的概念

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 Z_f. 如果对于 Z_f 中的每一个 y 值，都存在唯一满足 $y = f(x)$ 的 $x \in D_f$ 与之对应，这样确定的以 y 为自变量、以 x 为因变量的函数，称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**，记为 $x = f^{-1}(y)$. 习惯上，一般将 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

显然，反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域为 Z_f，值域为 D_f，且对任意的 $y \in Z_f$，有

$$f[f^{-1}(y)] = y.$$

对任意的 $x \in D_f$，有

$$f^{-1}[f(x)] = x.$$

单调函数一定存在反函数，且函数与反函数具有相同的单调性.

在同一坐标系下，函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图像是重合的，$y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

2．复合函数的概念

已知两个函数

$$y=f(u),\quad u\in D_f,\quad y\in Z_f,$$

$$u=\varphi(x),\quad x\in D_\varphi,\quad u\in Z_\varphi,$$

若 $D_f\cap Z_\varphi\neq\varnothing$，则可通过中间变量 u 将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$ 构成一个以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数 $y=f[\varphi(x)]$，称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的**复合函数**.

1.1.4　基本初等函数与初等函数

常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数这6大类函数统称为基本初等函数.

由基本初等函数经有限次四则运算和（或）复合运算而得到的函数称为初等函数.

几个常见的结论：

（1）$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}\ (|x|\leqslant 1)$；

（2）$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}$；

（3）$\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}(x\neq 0)$.

1.1.5　一些常用公式

（1）倍角公式

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha};$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha};$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

（2）半角公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

（3）某些数列的前 n 项和公式

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1);\qquad 1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

（4）乘法与因式分解公式

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;\qquad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);\qquad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$，其中 n 为正整数；

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n,$$

其中$C_n^0=1, C_n^k=\dfrac{A_n^k}{A_k^k}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$，$C_n^k=C_n^{n-k}$.

（5）对数公式

$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$；　　$\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$；

$\log_a x^b=b\log_a x$；　　$\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$；

$a^{\log_a x}=x$.

注：在上述对数公式中，要求$x>0$，$y>0$，$a>0$，$a\neq1$，$b>0$，$b\neq1$.

1.2　典型例题分析

1.2.1　题型一：函数定义域的求解

例 1.2.1　求函数$y=\dfrac{1}{\arcsin x}-\sqrt{3x+1}$的定义域.

解　由题意，$|x|\leqslant1$，$x\neq0$，且$3x+1\geqslant0$，解不等式得$-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant1$，且$x\neq0$. 所以函数的定义域为

$$D_f=\left[-\frac{1}{3},0\right)\cup(0,1].$$

例 1.2.2　已知

$$y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x\leqslant1,\\ \ln(x^2+1), & 1<|x|<2,\end{cases}$$

试求函数$f(x-1)$的定义域.

解　由题意可知，$f(x)$的定义域为$-1\leqslant x\leqslant1$与$1<|x|<2$的并集，因此$f(x)$的定义域为$-2<x<2$，故$f(x-1)$的定义域为$-2<x-1<2$，即$-1<x<3$.

例 1.2.3　设函数$y=f(x)$的定义域为$[0,6]$，求$g(x)=f(x+2)+\ln(2x+1)$的定义域.

解　由于$f(x)$的定义域为$[0,6]$，因此$f(x+2)$的定义域为$0\leqslant x+2\leqslant6$，即$x\in[-2,4]$；又因为$2x+1>0$，因此$x>-\dfrac{1}{2}$；所以$g(x)$的定义域为$D_f=\left(-\dfrac{1}{2},4\right]$.

1.2.2　题型二：函数表达式的求解

例 1.2.4　已知$f\left(\dfrac{1}{x}-x\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$，$x\neq0$，试求$f(x)$的表达式.

解　由于

$$f\left(\frac{1}{x}-x\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2=\left(\frac{1}{x}-x\right)^2+4,$$

令 $t=\dfrac{1}{x}-x$，则 $f(t)=t^2+4$，从而 $f(x)=x^2+4$， $x\neq 0$.

例 1.2.5　设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x+x^2}$，其中 $x<0$，试求 $xf(x)$.

解　令 $t=\dfrac{1}{x}$，则 $x=\dfrac{1}{t}$，从而

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}},$$

故

$$xf(x)=x\cdot\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=1-\sqrt{x^2+x+1}.$$

例 1.2.6　已知 $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=2f(x)+3x+1$，且 $x\neq -1$，试求 $f(x)$ 的表达式.

解　令 $t=\dfrac{x+1}{x-1}$，则 $x=\dfrac{t+1}{t-1}$，从而

$$f(t)=2f\left(\frac{t+1}{t-1}\right)+3\cdot\frac{t+1}{t-1}+1,$$

联立方程得

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=2f(x)+3x+1, \\ f(x)=2f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+3\cdot\dfrac{x+1}{x-1}+1, \end{cases}$$

解得

$$f(x)=-\frac{x+1}{x-1}-2x-1.$$

1.2.3　题型三：反函数的求解

例 1.2.7　求函数 $y=\begin{cases}-x^2-1, & x\leqslant 0, \\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$ 的反函数.

解　当 $x\leqslant 0$ 时， $y=-x^2-1$，从而 $x=-\sqrt{-y-1}$， $y\leqslant -1$；当 $x>0$ 时， $y=\ln(x+1)$，从而 $x=\mathrm{e}^y-1$， $y>0$. 因此反函数为

$$y=\begin{cases}-\sqrt{-x-1}, & x\leqslant -1, \\ \mathrm{e}^x-1, & x>0.\end{cases}$$

例 1.2.8　求函数 $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}+2$ 的反函数.

解　令 $2^x=t$，则 $2^{-x}=\dfrac{1}{t}$，因此有

$$(y-2)t+(y-2)\cdot\frac{1}{t}=t-\frac{1}{t},$$

整理得 $t^2=\frac{1-y}{y-3}$，从而 $t=\sqrt{\frac{1-y}{y-3}}$，即 $2^x=\sqrt{\frac{1-y}{y-3}}$，解得

$$x=\log_2\sqrt{\frac{1-y}{y-3}}=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1-y}{y-3}\right),$$

因此反函数为

$$y=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1-x}{x-3}\right),\quad x\in(1,3).$$

1.2.4　题型四：复合函数的求解

例 1.2.9　设 $f(x)=1-\frac{1}{x}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.

解

$$f[f(x)]=1-\frac{1}{f(x)}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x-1},$$

$$f\{f[f(x)]\}=1-\frac{1}{f[f(x)]}=1-\frac{1}{-\frac{1}{x-1}}=x.$$

例 1.2.10　设 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<0,\\ 0, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解　由题意，

$$f[f(x)]=\begin{cases}f^2(x)-1, & f(x)<0,\\ 0, & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

（1）由 $f(x)<0$，有 $f(x)=x^2-1<0$，且 $x<0$，从而 $-1<x<0$.

（2）由 $f(x)\geqslant 0$，有

$$\begin{cases}f(x)=x^2-1\geqslant 0,\\ x<0,\end{cases}\quad \text{或}\quad \begin{cases}f(x)=0\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$$

解得 $x\leqslant -1$ 或者 $x\geqslant 0$，因此

$$f[f(x)]=\begin{cases}(x^2-1)^2-1, & -1<x<0,\\ 0, & x\leqslant -1\text{或}x\geqslant 0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x^4-2x^2, & -1<x<0,\\ 0, & x\leqslant -1\text{或}x\geqslant 0.\end{cases}$$

例 1.2.11　$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1,\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}x+3, & x<0,\\ x-2, & x\geqslant 0,\end{cases}$　求 $f[g(x)]$.

解　由题意，$f[g(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}^{g(x)}, & g(x)<1,\\ g(x), & g(x)\geqslant 1,\end{cases}$ 下面进行分类讨论.

（1）当 $g(x)<1$ 时，则

$$\begin{cases} g(x)=x+3<1, \\ x<0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} g(x)=x-2<1, \\ x\geqslant 0, \end{cases}$$

从而有 $x<-2$ 或 $0\leqslant x<3$.

（2）当 $g(x)\geqslant 1$ 时，则

$$\begin{cases} g(x)=x+3\geqslant 1, \\ x<0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} g(x)=x-2\geqslant 1, \\ x\geqslant 0, \end{cases}$$

从而有 $-2\leqslant x<0$ 或 $x\geqslant 3$.

综上所述，有

$$f[g(x)]=\begin{cases} e^{x+3}, & x<-2, \\ x+3, & -2\leqslant x<0, \\ e^{x-2}, & 0\leqslant x<3, \\ x-2, & x\geqslant 3. \end{cases}$$

1.2.5　题型五：函数的四种基本特性

例 1.2.12　设对于 $\forall x\in R$ 有 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$ ，试求 $f(x)$ 的周期.

解　由题意可知，对于任意的 $x\in R$ 有 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)\geqslant\frac{1}{2}$ ，从而对于任意的 $x\in R$ 有 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$. 又因为

$$f\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\right]=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)} ,$$

因此有

$$f(x+1)=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=f(x) ,$$

故 $f(x)$ 的周期为 1.

例 1.2.13　设 $f(x)=\begin{cases} 2^x+1, & x<1, \\ 2x-1, & x>1, \end{cases}$ 试讨论函数 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 的奇偶性.

解　由题意，函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\in R, x\neq 1, x\neq -1\}$ ，定义域关于 $x=0$ 对称，又因为

$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]\;=-g(x) ,$$

因此函数 $g(x)$ 为奇函数.

注：类似方法可以证明函数 $\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 为偶函数，且奇偶性与函数 $f(x)$ 的具体表达式没有关系.

例 1.2.14　试证明：若函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的图像关于直线 $x=1$ 和 $x=2$ 对称，则 $f(x)$ 必为周期函数.

证　因为 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 和 $x=2$ 对称，因此对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x+1)=f(x-1)\,,\quad f(x+2)=f(x-2)\,,$$

所以

$$f(x)=f[(x-1)+1]=f[(x-1)-1]=f(x-2)=f(x+2)\,,$$

即对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)=f(x+2)$，因此 $f(x)$ 为周期函数.

1.3　深 化 训 练

1.3.1　填空题

（1）已知 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ x-6, & 2<x\leqslant 3,\end{cases}$ 则 $f(x+1)=$________.

（2）设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，则 $f[f(x)]=$______，$f[f(x)]$ 的定义域为__________.

（3）设对于任意的 $x\in R$，恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，且 $f(4)=16$，则 $f(1)=$_____.

1.3.2　单项选择题

（1）【2004（3）】函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界（　　）.

（A）$(-1,0)$　　　　（B）$(0,1)$

（C）$(1,2)$　　　　（D）$(2,3)$

（2）若对任意的 x，均有 $f(x+2)=-f(x)$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$f(x)$ 不是周期函数

（B）$f(x)$ 是周期函数，周期为 2

（C）$f(x)$ 是周期函数，周期为 4

（D）无法确定

（3）函数 $y=x-\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是（　　）.

（A）周期函数　　　　（B）有界函数

（C）奇函数　　　　（D）偶函数

1.3.3　设 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{x^4+1}+2$，求 $f(x)$ 的表达式.

1.3.4　求 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 的反函数.

1.3.5　试求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ x+6, & 2<x\leqslant 3,\end{cases}$ 的反函数.

1.3.6　设 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1-x$，且 $x\neq 0$，求 $f(x)$ 的表达式.

1.3.7　已知 $f(x)$ 是奇函数，判断 $F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$ 的奇偶性.

1.3.8　已知 $\cot\alpha=b$，其中 $\alpha\in(\pi,2\pi)$，试用反三角函数表示 α.

1.4　深化训练详解

1.3.1　填空题

（1）$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x-5, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$

（2）$\dfrac{1+x}{2+x}$；$\{x\,|\,x\in R, x\neq -1, x\neq -2\}$；**提示**　根据复合函数的定义，有

$$f[f(x)]=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{2+x};$$

$f[f(x)]$ 的定义域满足 $1+x\neq 0$，且 $1+f(x)\neq 0$，因而 $f[f(x)]$ 的定义域为

$$D=\{x\,|\,x\in R, x\neq -1, x\neq -2\}.$$

（3）1；**提示**　令 $y=x$，则有 $f(2x)=2f(x)+2x^2$，从而 $f(x)=\dfrac{1}{2}f(2x)-x^2$，因此

$$f(1)=\frac{1}{2}f(2)-1,\quad f(2)=\frac{1}{2}f(4)-4,$$

所以 $f(1)=1$.

1.3.2　单项选择题

（1）A；**提示**　由于

$$|f(x)|=\left|\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}\right|=\frac{1}{|(x-1)(x-2)|}\frac{|\sin(x-2)|}{|x-2|}\leqslant\frac{1}{|(x-1)(x-2)|},$$

当 $x\in(-1,0)$ 时，有

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{|(x-1)(x-2)|}=\frac{1}{(1-x)(2-x)}<\frac{1}{2},$$

故答案选 A．本题也可以利用极限的思想求解．

（2）C；**提示**　对任意的 x，有 $f(x+4)=f[(x+2)+2]=-f(x+2)=f(x)$.

（3）C.

1.3.3　由于

$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{x^4+1}+2=\frac{1}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}+2=\frac{1}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2}+2,$$

因此 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}+2$.

1.3.4　令 $e^x=t$，则 $x=\ln t$，$t>0$，则有 $y=\dfrac{t-t^{-1}}{2}$，从而

$$t^2-2yt-1=0,$$

求解一元二次方程可得 $t=y\pm\sqrt{y^2+1}$，舍去负根，有 $t=y+\sqrt{y^2+1}$，即有 $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$，因

此 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 的反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

1.3.5　当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，由 $y=x^2-1$，解得 $x=\sqrt{y+1}$，$0\leqslant y\leqslant 3$；当 $2<x\leqslant 3$ 时，由 $y=x+6$，解得 $x=y-6$，$8<y\leqslant 9$．综上可得，$f(x)$ 的反函数为

$$y=\begin{cases}\sqrt{x+1}, & 0\leqslant x\leqslant 0,\\ x-6, & 8<x\leqslant 9.\end{cases}$$

1.3.6　利用函数表示法的无关特性，令 $\dfrac{1}{x}=t$，则有 $f\left(\dfrac{1}{t}\right)+2f\left(t\right)=1-\dfrac{1}{t}$，联立方程组

$$\begin{cases}f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1-x,\\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=1-\dfrac{1}{x},\end{cases}$$

从而有

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3x}+\frac{x}{3},\quad x\neq 0 .$$

1.3.7　由题意可知，$F(x)$ 的定义域关于原点对称，且

$$F(-x)=f(-x)\left(\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)=-f(x)\cdot\frac{1-2^{-x}}{2(2^{-x}+1)}=-f(x)\cdot\frac{2^x-1}{2(1+2^x)},$$

而

$$F(x)=f(x)\cdot\frac{1-2^x}{2(2^x+1)},$$

从而有 $F(-x)=F(x)$，因此 $F(x)$ 为偶函数.

1.3.8　**解法 1**　因为 $\pi<\alpha<2\pi$，所以 $0<\alpha-\pi<\pi$，从而

$$\cot(\alpha-\pi)=\cot\alpha=b,$$

故 $\alpha-\pi=\operatorname{arccot}b$，即 $\alpha=\pi+\operatorname{arccot}b$.

解法 2　因为 $\pi<\alpha<2\pi$，所以 $0<2\pi-\alpha<\pi$，从而

$$\cot(2\pi-\alpha)=-\cot\alpha=-b,$$

故 $2\pi-\alpha=\arccos(-b)$，即 $\alpha=2\pi-\operatorname{arccot}(-b)$.

1.5　综合提高训练

例 1.5.1　证明函数 $y=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界.

证　利用反证法. 假设 $y=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界，则存在 $M>0$，使得对 $\forall x\in(0,+\infty)$，有

$$|x\sin x|<M,$$

取 $x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，从而有

$$|x\sin x| = 2n\pi + \frac{\pi}{2} < M,$$

显然当 n 足够大时，上式不成立，因此假设不成立，故函数 $y = x\sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界.

例 1.5.2　判断 $f(x) = x\cos x$ 函数是否为周期函数，若为周期函数，求其周期，若不是周期函数，说明理由.

解　利用反证法. 假设 $y = x\cos x$ 是周期函数，则存在 $T > 0$，使得对 $\forall x \in R$，有

$$f(x+T) = f(x).$$

即

$$(x+T)\cos(x+T) = x\cos x.$$

取 $x = 0$，则有 $T\cos(T) = 0$，从而 $\cos(T) = 0$，所以有

$$T = k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

取 $x = T$，则有 $2T\cos(2T) = T\cos(T) = 0$，从而

$$\cos(2T) = 0.$$

而 $\cos(2T) = \cos(2k\pi + \pi) = -1$，矛盾. 因此假设不成立，故 $y = x\cos x$ 不是周期函数.

例 1.5.3　设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有定义，且 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增，试证明对任意的两点 $x_1 > 0$，$x_2 > 0$，有 $f(x_1) + f(x_2) \leqslant f(x_1 + x_2)$.

证　不妨设 $0 < x_1 \leqslant x_2$，由于 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增，因此

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \leqslant \frac{f(x_2)}{x_2}, \quad \frac{f(x_2)}{x_2} \leqslant \frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2},$$

即

$$x_2 f(x_1) \leqslant x_1 f(x_2), \quad x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2) \leqslant x_2 f(x_1 + x_2),$$

故

$$x_2[f(x_1) + f(x_2)] \leqslant x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2) \leqslant x_2 f(x_1 + x_2),$$

从而有

$$f(x_1) + f(x_2) \leqslant f(x_1 + x_2).$$

第 2 章　极限与连续

2.1　知 识 要 点

2.1.1　极限的概念

1．数列的极限

设有数列$\{u_n\}$和常数A，对于任意给定的$\varepsilon > 0$，存在正整数N，使得当$n > N$时，恒有$|u_n - A| < \varepsilon$成立，则称数列$\{u_n\}$以A为**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \quad \text{或} \quad u_n \to A(n\to\infty).$$

注：定义中的ε刻画了u_n与A之间的接近程度，N刻画了n需要增大到什么程度，它与ε的取值有关．当n取第N项以后的各项时，u_n与A的距离小于ε，而ε可以任意小，这正是数列$\{u_n\}$中的各项随着n的增大而无限接近A的精确刻画.

2．$x\to\infty$时函数$f(x)$的极限

设有函数$y = f(x)$和常数A，对于任意给定的$\varepsilon > 0$，若存在$M > 0$，使当$|x| > M$时，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$成立，则称当$x\to\infty$时，$y = f(x)$的**极限**为A，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A(x\to\infty).$$

类似地，可以定义$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$和$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

3．$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限

设有函数$y = f(x)$和常数A，如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$成立，则称当$x\to 0$时$f(x)$的**极限**为A，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A\ (x\to x_0).$$

类似地，可以定义**右极限**$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$和**左极限**$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$.

2.1.2　无穷小量与无穷大量

1．无穷小量的定义与性质

以 0 为极限的变量称为**无穷小量**．需要注意的是，0 是一种特殊的无穷小量．无穷小量的概念在整个微积分中有着重要的作用，需要读者引起重视.

无穷小量有如下性质：

（1）有限个无穷小量的和是无穷小量；

（2）有界变量与无穷小量的乘积是无穷小量；

（3）$\lim Y = A \Leftrightarrow Y = A + \alpha$，其中$\alpha$是无穷小量（与$Y$同在一个变化过程中）.

2．无穷小量的阶

设α,β是同一变化过程中的两个无穷小量，则

（1）若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称$\beta$是比$\alpha$**高阶的无穷小量**（或$\alpha$是$\beta$比**低阶的无穷小量**），记为$\beta=o(\alpha)$.

（2）若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称$\beta$是与$\alpha$**同阶的无穷小量**，记为$\beta=O(\alpha)$. 特殊地，当$c=1$时，称$\beta$与$\alpha$是**等价的无穷小量**，记为$\alpha\sim\beta$.

3．等价无穷小量的性质

性质 1　设α,β,γ是同一变化过程中的无穷小量，则

（1）若$\alpha\sim\beta$，则$\beta\sim\alpha$；

（2）若$\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则$\alpha\sim\gamma$.

性质 2　设α，β，$\bar{\alpha}$和$\bar{\beta}$是同一变化过程中的无穷小量，且$\alpha\sim\bar{\alpha}$，$\beta\sim\bar{\beta}$，$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$存在，则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\bar{\alpha}}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\bar{\beta}}=\lim\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$$

4．常见的等价无穷小量公式

当$x\to 0$时：

（1）$\sin x\sim x$；

（2）$\arcsin x\sim x$；

（3）$\tan x\sim x$；

（4）$\arctan x\sim x$；

（5）$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；

（6）$\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$；

（7）$\log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a}\quad(a>0,a\neq 1)$；

（8）$\ln(1+x)\sim x$[为（7）式的特殊情况]；

（9）$a^x-1\sim x\ln a\quad(a>0,a\neq 1)$；

（10）$\mathrm{e}^x-1\sim x$[为（9）式的特殊情况]；

（11）$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$；

（12）$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$[为（11）式的特殊情况]；

（13）$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}$[为（11）式的特殊情况].

5．无穷大量的定义

如果在某个变化过程中，对于$\forall\ M>0$，存在某个时刻，使得在那个时刻以后恒有$|Y|>M$成立，则称变量Y为**无穷大量**，记为$\lim Y=\infty$或$Y\to\infty$.

在同一个变化趋势下，无穷小量与无穷大量有如下关系：

（1）若变量Y为无穷大量，则$\dfrac{1}{Y}$为无穷小量；

（2）若变量Y为无穷小量（$Y\neq 0$），则$\dfrac{1}{Y}$为无穷大量.

注：从本质上来讲，在相应的变化趋势下，无穷大量的极限是不存在的，常用的极限运算法则不适用，因此无穷大量的问题往往需要转化为无穷小量来讨论.

2.1.3　极限的性质与运算法则

1．极限的性质

（1）**唯一性**　若极限 $\lim Y$ 存在，则极限值唯一.

（2）**有界性**　如果 $\lim Y$ 存在，则 Y 是局部有界的．特别地，若数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在，则 $\{u_n\}$ 不仅是局部有界的，而且是全局有界的.

（3）**保号性**　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则 $f(x)$ 在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

（4）若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），则有 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

（5）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x)\geqslant g(x)$（或 $f(x)\leqslant g(x)$），则有 $A\geqslant B$（或 $A\leqslant B$）.

2．极限的运算法则

设极限 $\lim X$，$\lim Y$ 均存在，则

（1）$\lim(X\pm Y)$ 存在，且 $\lim(X\pm Y)=\lim X\pm\lim Y$；

（2）$\lim(X\cdot Y)$ 存在，且 $\lim(X\cdot Y)=\lim X\cdot\lim Y$；

（3）若 $\lim Y\neq 0$，则 $\lim\dfrac{X}{Y}$ 存在，且有 $\lim\dfrac{X}{Y}=\dfrac{\lim X}{\lim Y}$.

推论 1　若 $\lim X$ 存在，C 为一常数，则 $\lim(CX)$ 存在，且 $\lim(CX)=C\cdot\lim X$.

推论 2　若 $\lim X$ 存在，k 为一正整数，则 $\lim X^k$ 存在，且 $\lim(X^k)=(\lim X)^k$.

3．复合函数的极限运算法则

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成，$y=f[g(x)]$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，且 $g(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域满足 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A.$$

2.1.4　极限存在准则与两个重要极限

1．夹逼定理

如果变量 X,Y,Z 满足 $X\leqslant Y\leqslant Z$，且 $\lim X=\lim Z=A$（A 为某常数），那么 $\lim Y$ 也存在且 $\lim Y=A$.

2．单调有界准则

若数列 $\{u_n\}$ 单调且有界，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 一定存在.

3．数列与子数列的关系

从数列 $\{u_n\}$ 中抽取无穷多项，在不改变原有次序的情况下构成的新数列称为原数列 $\{u_n\}$ 的**子数列**，简称**子列**．记为 $\{u_{n_k}\}$：$u_{n_1},u_{n_2},\cdots,u_{n_k},\cdots$．其中 n_k 表示 u_{n_k} 在原数列 $\{u_n\}$ 中的位置，k 表示 u_{n_k} 在子列中的位置．

数列 $\{u_n\}$ 与子数列 $\{u_{n_k}\}$ 之间的关系：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A \Leftrightarrow$ 对 $\{u_n\}$ 的任何子数列 $\{u_{n_k}\}$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=A$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A \Leftrightarrow$ 偶数子列 $\{u_{2k}\}$ 和奇数子列 $\{u_{2k+1}\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k+1}=A$；

（3）当 $\{u_n\}$ 是单调数列时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A \Leftrightarrow$ 存在某个子数列 $\{u_{n_k}\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{n_k}=A$．

4．海涅（Heine）定理

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow$ 对任何数列 $\{x_n\}$，$x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，且 $x_n\neq x_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$．

注：海涅定理给出了数列极限与函数极限之间的关系．

5．两个重要公式

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$．该极限属于 $\dfrac{0}{0}$ 类型的未定式，它可以推广到 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$，其中 α 为任意趋于 0 的表达式．

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或者 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$．该极限属于 1^∞ 类型的未定式．它可以推广到 $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$．

2.1.5　函数的连续性

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的三个等价定义为：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；

（2）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，其中 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

（3）$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立．

$y=f(x)$ 在区间内连续的定义如下：

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点处都连续，则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续；如果 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续且在 a 处右连续，则称 $y=f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续．类似地，可以定义 $y=f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 和 $[a,b]$ 上的连续性．

2.1.6　函数的间断点

1．间断点的定义

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处出现如下三种情况之一，则称 x_0 为 $y=f(x)$ 的间断点：

（1）$y=f(x)$ 在点 x_0 处无定义；

（2） $y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

（3） $y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义， $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

2．间断点的类型

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**第一类间断点**，其中：

（1）**可去间断点**： $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ ；

（2）**跳跃间断点**： $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 中至少有一个不存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

特殊地，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 中至少有一个为 ∞，则称 x_0 为**无穷间断点**. 例如 $x=0$ 就是 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的第二类间断点中的无穷间断点.

2.1.7 连续函数的性质

1．连续函数的四则运算

若函数 $f(x)$ ，$g(x)$ 都在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$ ，$f(x)g(x)$ ，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $[g(x_0)\neq 0]$ 在点 x_0 处也连续.

2．复合函数的连续性

若 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续， $u=g(x)$ 在点 x_0 处连续且 $u_0=g(x_0)$ ，则 $y=f[g(x)]$ 在点 x_0 处连续.

3．反函数的连续性

若 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调、连续，则其反函数在相应的定义区间上单调、连续.

4．初等函数的连续型

初等函数在其定义区间内都是连续的.

2.1.8 闭区间上的连续函数的性质

1．有界性定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 一定在 $[a,b]$ 上有界，即 $\exists M>0$ ，对于 $\forall x\in[a,b]$ ，都有 $|f(x)|\leqslant M$.

2．最值定理

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定存在最大值和最小值.

3．介值定理

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，且 $M>m$，则对介于 m 与 M 之间的任意数 C，即 $m<C<M$，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=C$．

注：定理中的条件如果改为 $m\leqslant C\leqslant M$，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=C$．

4．零点存在定理

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$．

2.1.9　一些重要的结论

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$．

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$．

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0, & |a|<1,\\ 1, & a=1,\\ \text{不存在}, & \text{其他}.\end{cases}$

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & n=m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$ 其中 $a_n\neq0,b_m\neq0$．

2.2　典型例题分析

2.2.1　题型一：极限的概念与性质问题

例 2.2.1　【2014（3）】设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a\neq0$，则当 n 充分大时，有（　　）．

（A）$|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$　　（B）$|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$　　（C）$a_n>a-\dfrac{1}{n}$　　（D）$a_n<a+\dfrac{1}{n}$

解　根据数列极限的定义，对于 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$．由于

$$|a|-|a_n|\leqslant\big||a_n|-|a|\big|\leqslant|a_n-a|<\varepsilon,$$

从而有 $|a_n|>|a|-\varepsilon$，取 $\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}$，则 $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$，故选项 A 正确．

若取 $a_n=a-\dfrac{1}{n}$ 或 $a_n=a+\dfrac{1}{n}$，显然满足题设条件，因此选项 C 和选项 D 错误．

例 2.2.2　已知 $f(x)=x^3+\dfrac{\sin x}{x}+2\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\lim\limits_{x\to0}f(x)$，求 $f(x)$ 的表达式．

解　记 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=A$，则

$$f(x)=x^3+\frac{\sin x}{x}+2A\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

从而

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^3+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to 0} 2A\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

即有 $A=1+2A\cdot(-1)$， $A=\frac{1}{3}$，因此有

$$f(x)=x^3+\frac{\sin x}{x}+\frac{2}{3}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

例 2.2.3 【2013（3）】当 $x\to 0$ 时，用“$o(x)$”表示比 x 高阶的无穷小量，则下列式子中错误的是（　　）.

（A） $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　（B） $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

（C） $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　（D） $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

解　根据高阶无穷小量的定义，若选项 D 成立，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x)+o(x^2)}{x^2}=0.$$

事实上，

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x)+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{o(x)}{x^2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}\cdot\frac{1}{x},$$

当 $x\to 0$ 时， $\frac{o(x)}{x}$ 为无穷小量，而 $\frac{1}{x}$ 为无穷大量，因此极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}$ 不一定存在．例如取 $o(x)=x^2$， $o(x)=x^3$， $o(x)=x^{\frac{3}{2}}$ 等，上述极限结果均不相同，故选项 D 错误．

2.2.2　题型二：利用极限的四则运算法则求极限

例 2.2.4　求极限 $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x+5}-2x+2}{\sqrt{x^2+\sin x+1}}$.

解法 1　本题属于 $\frac{\infty}{\infty}$ 类型，分子分母同时除以 x（注意 x 为负值），有

$$\text{原式}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}-2+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-2-2}{-1}=4.$$

解法 2　该类型问题常用的方法是做替换 $t=-x$，当 $x\to -\infty$ 时， $t\to +\infty$，从而

$$\text{原式}=\lim_{t\to +\infty}\frac{\sqrt{4t^2+2t+5}+2t+2}{\sqrt{t^2-\sin t+1}}=\lim_{t\to +\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{2}{t}+\frac{5}{t^2}}+2+\frac{2}{t}}{\sqrt{1-\frac{\sin t}{t^2}+\frac{1}{t^2}}}=\frac{2+2}{1}=4.$$

例 2.2.5　求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$.

解　本题属于$\infty-\infty$类型，进行分子有理化，有

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-(x+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}=0.$$

例 2.2.6　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n+5)^{10}(3n-1)^5}{(2n+3)^{15}}$.

解
$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(4n+5)^{10}}{n^{10}}\cdot\frac{(3n-1)^5}{n^5}}{\frac{(2n+3)^{15}}{n^{15}}}=\frac{\left(4+\frac{5}{n}\right)^{10}\left(3-\frac{1}{n}\right)^5}{\left(2+\frac{3}{n}\right)^{15}}=\frac{4^{10}\cdot3^5}{2^{15}}=6^5.$$

例 2.2.7　设 $x_n=1+\dfrac{1}{1+1}+\dfrac{1}{1+2}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}$，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　由于

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

因此，当 $n\geqslant 3$ 时，

$$x_n=1+\frac{1}{1+1}+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1+\frac{1}{1+1}+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1+\frac{1}{1+1}+1=\frac{5}{2}.$$

2.2.3　题型三：利用单侧极限的性质求极限

例 2.2.8　【2000（1）】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解　由于

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

由于左右极限均存在且相等，因此原式 $=1$.

例 2.2.9　设

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}-1, & x<1, \\ \dfrac{\ln(2-x)}{x-1}, & x\geqslant 1, \end{cases}$$

试求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解　$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的分段点，因此需要考察左右极限，

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(e^{\frac{1}{x-1}}-1\right)=-1,$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(2-x)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln[1+(1-x)]}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x-1}=-1,$$

由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-1$，故 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

2.2.4　题型四：利用两个重要极限求极限

例 2.2.10　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(2nx)-\cos(nx)}{x^2}$，其中 n 为正整数.

解法 1　利用第一个重要极限，有

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{[1-\cos(nx)]-[1-\cos(2nx)]}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(nx)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2nx)}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{nx}{2}}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(nx)}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{nx}{2}}{\frac{4}{n^2}\cdot\left(\frac{nx}{2}\right)^2}-\lim_{x\to 0}\frac{2n^2\sin^2(nx)}{(nx)^2}\\
&=\frac{1}{2}n^2-2n^2=-\frac{3}{2}n^2.
\end{aligned}$$

解法 2　利用等价无穷小量替换，有

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{[1-\cos(nx)]-[1-\cos(2nx)]}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(nx)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2nx)}{x^2}
\end{aligned}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(nx)^2}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2nx)^2}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}n^2-2n^2=-\frac{3}{2}n^2 .$$

例 2.2.11 【2003（1）】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

解 利用第二个重要极限，有

$$原式=\lim_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}},$$

又因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

所以原式 $=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

2.2.5 题型五：利用等价无穷小量替换求极限

例 2.2.12 【2002（3）】设 $a\neq\frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$________.

解 利用等价无穷小量替换公式 $\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$，于是

$$原式=\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}=\lim_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a} .$$

例 2.2.13 【2004（2）】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

解 由于当 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^x-1\sim x$ $\ln(1+x)\sim x$，因此

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

例 2.2.14 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 a,b,c 均为正数.

分析：本题属于 1^∞ 类型，常用的方法有两种，一是利用第二个重要极限进行求解，二是利用对数恒等式，将表达式 $f(x)$ 其转化为 $\mathrm{e}^{\ln f(x)}$ 的形式，再使用洛必达法则或等价无穷小量等方法进行求解（洛必达法则见第 4 章）.

解 利用对数恒等式，有

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\exp\left\{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)\right\}\ ,$$

利用等价无穷小量替换，于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)=\lim_{x\to0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}\\&=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{b^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{c^x-1}{x}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to0}\frac{x\ln a}{x}+\lim_{x\to0}\frac{x\ln b}{x}+\lim_{x\to0}\frac{x\ln c}{x}\right)\\&=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\frac{1}{3}\ln(abc)\ ,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln(abc)}=\sqrt[3]{abc}\ .$$

2.2.6 题型六：利用极限存在准则求极限

例 2.2.15 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0$，$2x_{n+1}=x_n+\dfrac{4}{x_n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限值.

证 因为 $2x_{n+1}=x_n+\dfrac{4}{x_n}\geqslant2\sqrt{x_n\cdot\dfrac{4}{x_n}}=4$，所以 $x_{n+1}\geqslant2$，即数列 $\{x_n\}$ 有下界. 又

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}x_n+\frac{2}{x_n}-x_n=\frac{2}{x_n}-\frac{1}{2}x_n=\frac{4-x_n^2}{2x_n}\leqslant0\ ,$$

即有 $x_{n+1}\leqslant x_n$，所以数列 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调收敛准则可知，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则等式 $2x_{n+1}=x_n+\dfrac{4}{x_n}$ 两边同时取极限，有 $2A=A+\dfrac{4}{A}$，因此 $A=\pm2$，由保号性可知 $A\geqslant2$，所以 $A=2$.

例 2.2.16 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$.

解 由于

$$4=(4^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant4^{\frac{1}{n}}\cdot4\ ,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}4\cdot4^{\frac{1}{n}}=4$，由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}=4\ .$$

注：本例题的结论可以推广到一般情况，例如求极限

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_K^n)^{\frac{1}{n}},$$

其中 K 为某个正整数， $a_i>0$ ， $i=1,\cdots,K$ ， 则

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_K^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_K\}.$$

例 2.2.17　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x^n)^{\frac{1}{n}}$，其中 $x>0$.

解　利用例 2.2.16 的结论，当 $0<x<1$ 时，原式 $=1$；当 $x=1$ 时，原式 $=1$；当 $x>1$ 时，原式 $=x$，因此

$$原式=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\\ x, & x>1.\end{cases}$$

****例 2.2.18**　证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证　取两个子数列

$$\{x_n^{(1)}\}=\left\{\frac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right\}和\{x_n^{(2)}\}=\left\{\frac{1}{n\pi}\right\},$$

显然满足

$$x_n^{(1)}\neq 0,\lim_{n\to\infty}x_n^{(1)}=0；\quad x_n^{(2)}\neq 0,\lim_{n\to\infty}x_n^{(2)}=0,$$

但是

$$\sin\frac{1}{x_n^{(1)}}=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n^{(1)}}=1,$$

$$\sin\frac{1}{x_n^{(2)}}=\sin(n\pi)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n^{(2)}}=0,$$

由海涅定理可知，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

2.2.7　题型七：函数的连续性问题

例 2.2.19　讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的连续性.

解　当 $|x|<1$ 时， $f(x)=1+x$；当 $|x|=1$ 时， $f(x)=\dfrac{1+x}{2}$；当 $|x|>1$ 时， $f(x)=0$.

从而

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1,\\ 1+x, & -1<x<1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)=0$，所以 $x=-1$ 为函数 $f(x)$ 的连续点．又因为 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$，$f(1)=0$，所以 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点．综上可得，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 内连续．

例 2.2.20　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ a\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值．

解　由于

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\tan x}{\dfrac{x}{2}}=-2,$$

而 $f(0)=a\mathrm{e}^0=a$，因此 $a=-2$．

例 2.2.21　求函数 $f(x)=\dfrac{\arctan x}{|x(x-1)|}$ 的间断点，并指出其类型．

解　显然 $x=0$ 和 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点．因为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x}{x(1-x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x(1-x)}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\arctan x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(x-1)}=-1,$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，因此 $x=0$ 是第一类间断点中的跳跃间断点．又因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot|x-1|}{\arctan x}=0,$$

因此 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$，故 $x=1$ 是第二类间断点中的无穷间断点．

2.2.8　题型八：连续函数的等式证明问题

例 2.2.22　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，求证存在 $\xi\in[0,1]$，使得

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right).$$

证法 1　利用零点定理，构造辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

则

$$\varphi(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right),\quad \varphi\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1).$$

若 $f(0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，则取 $\xi=\dfrac{1}{2}$，结论成立. 若 $f(0)\neq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，则 $\varphi(0)$ 和 $\varphi(1)$ 一定异号，由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)\subset[0,1]$，使得 $\varphi(\xi)=0$，从而有

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right).$$

证法 2　利用介值定理，构造辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

由题意可知，$\varphi(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上连续,由闭区间上连续函数的最值定理可知，$\varphi(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上一定能够取到最大值 M 和最小值 m，因此有 $2m\leqslant\varphi(0)+\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant 2M$，而

$$\varphi(0)+\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)=0,$$

因此有 $m\leqslant 0\leqslant M$，由介值定理可知，至少存在一点 $\xi\in[0,1]$，使得 $\varphi(\xi)=0$，结论得证.

注：本例采用了两种方法，证法 1 的主要优势是能够在开区间 $(0,1)$ 内找到一点 ξ，使得结论成立，而证法 2 只能在闭区间 $[0,1]$ 上找到一点 ξ.

例 2.2.23　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，求证至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{3}\right).$$

解　构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{3}\right),$$

则

$$F(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{3}\right),\quad F\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(\frac{2}{3}\right),\quad F\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)-f(1).$$

（1）若 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$ 和 $f\left(\frac{2}{3}\right)$ 至少有两个相等，例如 $f(0)=f\left(\frac{1}{3}\right)$，则取 $\xi=\frac{1}{3}$，结论成立.

（2）若 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$ 和 $f\left(\frac{2}{3}\right)$ 都互不相等，则 $F(0)\neq 0$，$F\left(\frac{1}{3}\right)\neq 0$，$F\left(\frac{2}{3}\right)\neq 0$.

不妨设 $F(0)>0$，接下来又分两种情况进行讨论：

若 $F\left(\frac{1}{3}\right)<0$，则由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in\left(0,\frac{1}{3}\right)\subset(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，结论得证；

若 $F\left(\frac{1}{3}\right)>0$，则有 $f(0)>f\left(\frac{1}{3}\right)>f\left(\frac{2}{3}\right)$，从而 $F\left(\frac{2}{3}\right)<0$，由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in\left(0,\frac{2}{3}\right)\subset(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，从而结论得证.

2.3　深 化 训 练

2.3.1　填空题.

（1）对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-0|<\delta$ 时，有 $\left|\frac{f(x)}{x}-1\right|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

（2）【2005（3）】 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$________.

（3）【2006（1）】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________.

（4）【2006（3）】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$________.

（5） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+5^{n+1}}{2^n+5^{n+2}}=$________.

（6） $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}=$________.

（7）已知 $f(x)=2x+4\sin x\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$，则 $f(x)=$________.

（8） $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3nx}{1-nx}$ 的连续区间为__________.

2.3.2　单项选择题.

（1）【2015（3）】设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是（　　）.

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=a$

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=a$

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

（2）对 $\forall x$，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[g(x)-\varphi(x)\right]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$（　　）.

（A）存在且一定不等于零　　（B）存在但不一定为零

（C）一定不存在　　（D）不一定存在

（3）设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，则数列 $\{b_n\}$ 满足条件（　　）时， $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n$ 存在.

（A） $\{b_n\}$ 有界　　（B） $\{b_n\}$ 单调　　（C） $\{b_n\}$ 单调有界　　（D）不能确定

（4）设 $f(x),\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义， $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0$， $\varphi(x)$ 有间断点，则下列结论正确的是（　　）.

（A） $\varphi[f(x)]$ 必有间断点　　（B） $\varphi[f^2(x)]$ 必有间断点

（C） $f[\varphi(x)]$ 必有间断点　　（D） $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

（5）下列说法正确的是（　　）.

（A）若 $f(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

（B）若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则必存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内有界

（C）若 $f(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内有界且可导，则 $f'(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内有界

（D）若 $f(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内有界，且有 $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$，则有 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

2.3.3　求下列极限：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$；　　（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos\sqrt{1-\cos x}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$；　　（4）【2009（3）】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

2.3.4　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a 和 b 的值.

2.3.5　已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}[2x-\sqrt{x^2-1}-(ax+b)]=0$，试确定常数 a 与 b 的值.

2.3.6　设当 $x\to 1$ 时，$1-\dfrac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}$ 是 $x-1$ 的等价无穷小，试求 m 的值.

2.3.7　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$，求函数 $f(x)$ 的表达式.

2.3.8　设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(2^t+x^t)}{t}$，其中 $x>0$，求 $f(x)$ 的表达式.

2.3.9　设 $x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{8}{x_n^2}\right)$（$n=0,1,2,\cdots$），其中 $x_0>0$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2.3.10　设数列 $\{x_n\}$ 由以下等式给定，

$$x_1=\sqrt{a}\ ,\quad x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}\ ,\quad x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}\ ,\quad \cdots,$$

其中 $a>0$，试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2.3.11　试求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}$ 的间断点，并指出其类型.

2.3.12　试求函数 $f(x)=\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x-1}}{\sin\dfrac{\pi x}{2}}$ 的间断点，并指出其类型.

2.3.13　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$0<f(x)<1$，证明方程 $f(x)=x$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

2.3.14　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，$c_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}\ .$$

2.4　深化训练详解

2.3.1　填空题.

（1）0；　（2）2；　（3）2；

（4）1；**提示**　因为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}\leqslant\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}\leqslant\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n},$$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=1$.

（5）$\frac{1}{5}$；　（6）4；

（7）$f(x)=2x-\frac{4\pi}{3}\sin x$；**提示**　因为极限值等于某个常数，因此不妨设

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=A,$$

原题等式两边同时求极限，得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2x+\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 4A\sin x,$$

即有 $A=\pi+4A$，所以 $A=-\frac{\pi}{3}$，从而 $f(x)=2x-\frac{4\pi}{3}\sin x$.

（8）$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2.3.2　单项选择题.

（1）D；**提示**　根据数列极限与子数列极限之间的关系可知，选项 D 错误．例如

$$x_n=\begin{cases} a+\frac{1}{n}, & n=3k,3k-1, \\ n^2, & n=3k-2. \end{cases}$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1}=a$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在.

（2）D；**提示**　若取 $\varphi(x)=f(x)=g(x)=1$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$；若取 $\varphi(x)=f(x)=g(x)=x^2$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$，故选项 D 正确.

（3）C；　（4）D；　（5）B.

2.3.3　求下列极限：

（1）
$$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0.$$

（2）由于当 $x\to 0$ 时，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，因此

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}(\sqrt{1-\cos x})^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}(1-\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{4}x^2}=4.$$

（3）
$$原式=\lim_{x\to\infty}x\left(1+\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}\right)=\lim_{x\to\infty}(-x)\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}(-x)\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^3}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^2}=0.$$

（4）　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\cos x}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{1-\cos x}-1}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\mathrm{e}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\dfrac{3\mathrm{e}}{2}$.

2.3.4　由于

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=0,$$

所以$\begin{cases}1-a=0\\ a+b=0\end{cases}$，因此$a=1,\quad b=-1$.

2.3.5　由于

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to+\infty}[2x-\sqrt{x^2-1}-(ax+b)]=\lim_{x\to+\infty}[x-\sqrt{x^2-1}+(1-a)x-b]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+(1-a)x-b\right]=0,\end{aligned}$$

则$1-a=0$，即$a=1$．从而

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

2.3.6　根据等价无穷小的定义，有

$$\begin{aligned}1&=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{m}{1+x+\cdots+x^{m-1}}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+x+\cdots+x^{m-1}-m}{x^m-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{1+2x+\cdots+(m-1)x^{m-2}}{mx^{m-1}}=\frac{1+2+\cdots+(m-1)}{m}=\frac{m-1}{2},\end{aligned}$$

所以$m=3$.

2.3.7　$f(x)=\begin{cases}x, & x<-1,\\ 0, & x=-1,\\ -x, & -1<x<1,\\ 0, & x=1,\\ x, & x>1.\end{cases}$

2.3.8　当$0<x<2$时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t\ln2+\ln\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)^t\right]}{t}=\ln2$；

当$x=2$时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(2^t+2^t)}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{(t+1)\ln2}{t}=\ln2$；

当$x>2$时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t\ln x+\ln\left[1+\left(\frac{2}{x}\right)^t\right]}{t}=\ln x$.

综上可得

$$f(x)=\begin{cases}\ln 2, & 0<x\leqslant 2,\\ \ln x, & x>2.\end{cases}$$

2.3.9　由于

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(x_n+x_n+\frac{8}{x_n^2}\right)\geqslant\sqrt[3]{x_n\cdot x_n\cdot\frac{8}{x_n^2}}=2\text{；}$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{8}{x_n^2}\right)-x_n=\frac{1}{3x_n^2}\left(8-x_n^3\right)\leqslant 0\text{，}$$

因此 $x_{n+1}\leqslant x_n$．又因为数列 $\{x_n\}$ 单调递减有下界，所以数列 $\{x_n\}$ 收敛．

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由题意可得 $A=\dfrac{1}{3}\left(2A+\dfrac{8}{A^2}\right)$，所以 $A=2$．

2.3.10　显然数列 $\{x_n\}$ 单调递增，且 $x_n\geqslant\sqrt{a}$．由于

$$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}\text{，}$$

因此 $x_n^2=a+x_{n-1}$，于是 $x_n^2<a+x_n$，从而

$$x_n<\frac{a}{x_n}+1\leqslant\frac{a}{\sqrt{a}}+1=\sqrt{a}+1\text{．}$$

即数列 $\{x_n\}$ 有界，根据单调有界准则可知，数列 $\{x_n\}$ 收敛．

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，根据保号性可知，$\sqrt{a}\leqslant A\leqslant 1+\sqrt{a}$．等式 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$ 两边同时取极限，有

$$A=\sqrt{a+A}\text{，}$$

解得 $A=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$，舍去负根，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$．

2.3.11　由于

$$f(x)=\frac{x(x-2)}{|x|(x-2)(x+2)}\text{，}$$

显然 $x=-2$，$x=0$，$x=2$ 是函数 $f(x)$ 的间断点．因为

$$\lim_{x\to -2}f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x(x-2)}{|x|(x-2)(x+2)}=\infty\text{，}$$

故 $x=-2$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点中的无穷间断点．由于

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(x+2)}=2\text{，}$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{x+2}=-2\text{，}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的跳跃间断点．由于

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{|x|(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4}\text{，}$$

因此 $x=2$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点.

2.3.12　显然 $f(x)$ 的间断点为 $x=1,\quad x=2k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-\frac{\pi}{2}，\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=\frac{\pi}{2}，$$

故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的跳跃间断点. 由于

$$\lim_{x\to0}f(x)=-\frac{1}{2}，$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点. 当 $k\neq0$ 时，

$$\lim_{x\to2k}f(x)=\infty，$$

因此 $x=2k(k\neq0,k\in Z)$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点中的无穷间断点.

2.3.13　构造辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-x$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$\varphi(0)=f(0)>0，\quad \varphi(1)=f(1)-1<0，$$

因此，根据零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\varphi(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$，结论得证.

2.3.14　由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因此一定存在最大值 M 和最小值 m，使得对任意的 $x\in[a,b]$，有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$. 从而

$$c_i m\leqslant c_i f(x_i)\leqslant c_i M，\quad i=1,2,\cdots,n，$$

故

$$(c_1+c_2+\cdots+c_n)m\leqslant c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots c_nf(x_n)\leqslant(c_1+c_2+\cdots+c_n)M，$$

不等式两边同时除以 $c_1+c_2+\cdots+c_n$，得

$$m\leqslant\frac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}\leqslant M，$$

由介值定理可知，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}.$$

2.5　综合提高训练

例 2.5.1　设 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+2x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，求 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解　因为

$$\lim_{x\to0}\left[1+2x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+2x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}\right\}=\mathrm{e}^3，$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+2x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}=3，\text{且}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0，$$

从而利用等价无穷小量代换得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+2x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+\dfrac{f(x)}{x}}{x}=2+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=3,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=1,$$

故

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x^2}}=\mathrm{e}.$$

例 2.5.2　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}$，其中 $x\geqslant 0$，讨论 $f(x)$ 的连续性.

解　当 $0\leqslant x<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}=1^0=1$；

当 $x=1$ 时，$f(x)=2^0=1$；

当 $1<x<2$ 时，$f(x)=x\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x^n}+1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}=x\cdot 1^0=x$；

当 $x=2$ 时，$f(x)=2\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2^n}+1+1\right]^{\frac{1}{n}}=2\times 2^0=2$；

当 $x>2$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^n+\left(\dfrac{2}{x}\right)^n+1\right]^{\frac{1}{n}}=\dfrac{x^2}{2}$.

综上可得，

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x & 1<x\leqslant 2;\\ \dfrac{1}{2}x^2 & x>2.\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$，$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处连续，从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

例 2.5.3　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$，求证对于任意正整数 n，必存在 $x_n\in[0,1]$，使得 $f(x_n)=f\left(x_n+\dfrac{1}{n}\right)$.

证　构造辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right),$$

由题意可知，$\varphi(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{n-1}{n}\right]$ 上连续，由闭区间上连续函数的最值定理可知，$\varphi(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{n-1}{n}\right]$ 上一定能够取到最大值 M 和最小值 m，于是有

$$m \leqslant \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant M,\ k=0,1,\cdots,n-1,$$

所以

$$m \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant M,$$

又因为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\left[f(0)-f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f(1)\right]=0,$$

从而有 $m \leqslant 0 \leqslant M$，由介值定理可知，至少存在一点 $x_n \in \left[0,1-\dfrac{1}{n}\right] \subset [0,1]$，使得 $\varphi(x_n)=0$，即有 $f(x_n)=f\left(x_n+\dfrac{1}{n}\right)$.

例 2.5.4　设 $a>0, b>0, c>0$，

$$A(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0,\\ c, & x=0.\end{cases}$$

（1）讨论 $A(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性；

（2）讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}A(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}A(x)$，$A(-1)$ 以及 $A(1)$ 之间的大小关系.

解　（1）由于

$$\lim_{x\to 0}A(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln 2}{x}},$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln 2}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{a^x+b^x-2}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{2x}\\&=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab},\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x\to 0}A(x)=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}.$$

所以当 $c=\sqrt{ab}$ 成立时，$A(x)$ 在 $x=0$ 处连续，否则 $A(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

（2）由于

$$\lim_{x\to+\infty}A(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln 2}{x}\right\},$$

当 $a>b$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty}A(x)=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln a^x\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^x\right]-\ln 2}{x}\right\}=a,$$

当 $a<b$ 时，由对称性可知， $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)=b$，当 $a=b$ 时， $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)=a$，因此

$$\lim_{x\to+\infty}A(x)=\max\{a,b\}.$$

类似地，

$$\lim_{x\to-\infty}A(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln 2}{x}\right\},$$

令 $t=-x$，则

$$\lim_{x\to-\infty}A(x)=\exp\left\{\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(a^{-t}+b^{-t})-\ln 2}{-t}\right\},$$

当 $a>b$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty}A(x)=b$，当 $a<b$ 时，由对称性可知，$\lim\limits_{x\to-\infty}A(x)=a$，当 $a=b$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty}A(x)=a$，因此

$$\lim_{x\to-\infty}A(x)=\min\{a,b\}.$$

又因为 $A(-1)=\dfrac{2ab}{a+b}$， $A(1)=\dfrac{a+b}{2}$，从而

$$\lim_{x\to+\infty}A(x)\geqslant A(1)\geqslant\lim_{x\to 0}A(x)\geqslant A(-1)\geqslant\lim_{x\to-\infty}A(x).$$

第 3 章　导数与微分

3.1　知 识 要 点

3.1.1　导数的概念

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**为

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

左导数、右导数的定义分别为

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

显然，$f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都存在并且相等.

在讨论初等函数在定义区间端点的可导性或分段函数在分段点处的可导性时，往往利用左右导数进行讨论.

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内任意一点 x 处都可导，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导．对于 $\forall x\in(a,b)$ ，有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，并且 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导．类似地，可以给出函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 或 $(a,b]$ 上可导的定义.

3.1.2　导数的几何意义

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率，从而曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),$$

其中 $f'(x_0)\neq 0$ ．若 $f'(x_0)=0$ ，则法线方程为 $x=x_0$.

3.1.3　基本导数公式

（1） $c'=0$ ；　　　　（2） $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ （ α 为任意实数）;

（3）$(a^x)'=a^x\ln a$ （$a>0,a\neq 1$）；

（4）$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

（5）$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ $(a>0,a\neq 1)$；

（6）$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$；

（7）$(\sin x)'=\cos x$；

（8）$(\cos x)'=-\sin x$；

（9）$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$；

（10）$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$；

（11）$(\sec x)'=\sec x\tan x$；

（12）$(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

（13）$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

（14）$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

（15）$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；

（16）$(\mathrm{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

3.1.4　导数的四则运算法则

如果函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均可导，那么它们的和、差、积、商（除分母为零的点外）都可导，并且

（1）$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

（2）$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$；

（3）$\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$，其中 $v(x)\neq 0$.

推论　若 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 均为 x 的函数且可导，k 为某个正整数，c 为某个常数，则

（1）$(u_1+u_2+\cdots+u_k)'=u_1'+u_2'+\cdots+u_k'$；

（2）$(cu)'=cu'$；

（3）$(u_1u_2\cdots u_k)'=u_1'u_2\cdots u_k+u_1u_2'\cdots u_k+\cdots+u_1u_2\cdots u_k'$；

（4）$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$，其中 $v\neq 0$.

3.1.5　常用求导法则

1．复合函数的求导法则

若函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处有导数 $\varphi'(x)$，函数 $y=f(u)$ 在对应点 $u=\varphi(x)$ 处有导数 $f'(u)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可导，且有

$$\{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\varphi'(x)\text{，或}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

2．反函数的求导法则

设单调连续函数 $x=\varphi(y)$ 在点 y 处可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则其反函数 $y=f(x)$ 在对应点 x 处可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

3．隐函数的求导法则

设 $y=f(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，将方程中的 y 看成 x 的函数，方程两边同时对 x 求导（注意 y 为 x 的函数，对 y 的函数求导时，需要用复合函数求导法则），解出 y' 即可.

4．对数求导法则

先对函数两边取对数，将其变成隐函数，然后利用隐函数求导法则即可．当 $f(x)$ 为多个函数的乘积或商的形式，或者为幂指函数形式时，可考虑使用对数求导法则进行求解.

3.1.6　高阶导数

1．高阶导数的定义

函数 $y=f(x)$ 导数的导数称为 $f(x)$ 的**二阶导数**，记为

$$f''(x)，\quad y''，\quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}，\quad \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}.$$

即有

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}，\text{或 } f''(x)=\lim_{t\to x}\frac{f'(t)-f'(x)}{t-x}.$$

若 $y=f(x)$ 在 x 处的二阶导数存在，也称函数 $f(x)$ 在点 x 处**二阶可导**. 一般地，$y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 **n 阶导数**，记为

$$f^{(n)}(x)，\quad y^{(n)}，\quad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}，\quad \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}，$$

即有

$$f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'，\text{或}\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

同理，若 $y=f(x)$ 在 x 处的 n 阶导数存在，也称函数 $f(x)$ 在点 x 处 n 阶可导.

注：根据二阶导数的定义，若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导，即 $f''(x_0)$ 存在，则 $f'(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内一定有定义；二阶以及二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

2．莱布尼茨公式

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均 n 阶可导，则

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}，$$

其中 $u^{(0)}=u,\ \ v^{(0)}=v$.

3．几个常用的高阶导数公式

（1）$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$；

（2）$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$；

（3）$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a,\ a > 0$.

3.1.7　微分的概念与性质

1．微分的概念

设函数 $y = f(x)$ 在点 x 的某个邻域内有定义，当自变量在点 x 处取得增量 Δx 时（点 $x + \Delta x$ 仍在该邻域内），函数 y 相应地取得改变量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$，若 Δy 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)，\quad \Delta x \to 0，$$

其中 A 可以与 x 有关，但与 Δx 无关，则称 $y = f(x)$ 在点 x 处**可微**，并称 $A\Delta x$ 为 $y = f(x)$ 在点 x 处的**微分**，记为 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即有

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = A\Delta x .$$

由定义，微分 $\mathrm{d}y$ 是 Δx 的线性函数，当 $A \neq 0$ 时，也称微分 $\mathrm{d}y$ 是增量 Δy 的线性主部函数，微分 $\mathrm{d}y$ 与增量 Δy 仅相差一个关于 Δx 的高阶无穷小，即

$$\mathrm{d}y = \Delta y + o(\Delta x)，\quad \Delta x \to 0 .$$

2．导数与微分的相关定理

函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可微的充分必要条件是 $y = f(x)$ 在点 x 处可导，并且 $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$.

根据微分的定义，$\mathrm{d}x = (x)'\Delta x = \Delta x$，因此函数 $y = f(x)$ 在点 x 处的微分最终可以表示为

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x .$$

从导数与微分的关系可以看到，一元函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可导与可微是等价的，且有 $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即导数可视为函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量微分 $\mathrm{d}x$ 的商，因此，导数也被称为**“微商”**.

3．极限、连续及微分之间的关系

设函数 $y = f(x)$ 在点 x 的某个邻域内有定义，则函数的极限、连续、导数及微分之间的关系如图 3.1 所示.

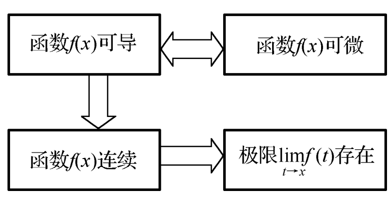


图 3.1　函数的极限、连续、导数及微分之间的关系

4．微分的四则运算法则

设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在点 x 处均可微，则有

（1）$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$；

（2）$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$；

（3）$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$，其中 $v \neq 0$.

5．复合函数的微分法则

设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x 处可微，$y = f(u)$ 在对应点 $u = \varphi(x)$ 处可微，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可微，且

$$\mathrm{d}y = y'_x \mathrm{d}x = f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x .$$

由于 $\mathrm{d}u=\varphi'(x)\mathrm{d}x$，所以 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分也可以表示为

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u\ .$$

这说明对于函数 $y=f(u)$，不论 u 是自变量还是中间变量，其微分都可以表示为如下形式

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u\ ,$$

这一性质称为**一阶微分形式不变性**.

6．微分在近似计算中的应用

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，根据微分的定义，当 $|\Delta x|$ 很小时，有

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\mathrm{d}x=f'(x_0)\Delta x\,,$$

从而

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\,,$$

若取 $x=x_0+\Delta x$，则当 $|x-x_0|$ 很小时，有

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\,.$$

7．一些常见的近似公式

当 $|x|$ 很小时，有

（1）$\sin x\approx x$；　（2）$\tan x\approx x$；　（3）$\arcsin x\approx x$；

（4）$\mathrm{e}^x\approx 1+x$；　（5）$\ln(1+x)\approx x$；　（6）$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{n}$.

3.1.8　导数在经济学中的应用

1．边际与边际分析

在经济学中，函数的变化率也称为**边际函数**．若函数 $y=f(x)$ 可导，则称 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的边际函数.

例如成本函数 $C=C(x)$，其中 x 为产量，则 $C'(x)$ 称为**边际成本**，由于

$$\Delta C=C(x+1)-C(x)\approx C'(x)\,,$$

因此边际成本 $C'(x)$ 的经济意义为：$C'(x)$ 近似地等于当产量为 x 时，再多生产一个单位产品所增加的成本.

收入函数 $R=R(x)$，其中 x 表示销售量，$R'(x)$ 称为边际收入．类似地，边际收入 $R'(x)$ 的经济意义为：$R'(x)$ 近似地等于当销售量为 x 时，再多销售一个单位产品所增加的收入.

类似地，可以给出边际利润的概念.

2．弹性与弹性分析

在经济学中，函数的相对变化率称为**弹性函数**，该函数刻画了一个经济变量对另一个经济变量变化的反应程度.

如果函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0\ (x_0\neq 0)$ 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 的弹性 $\left.\dfrac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$ 定义为

$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta y}{f(x_0)}}{\dfrac{\Delta x}{x_0}} = f'(x_0)\cdot\frac{x_0}{f(x_0)}.$$

类似地，若 $y=f(x)$ 在点 $x\,(x\neq 0)$ 处可导，则 $f(x)$ 的弹性函数 $\dfrac{Ey}{Ex}$ 定义为

$$\frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{f(x)} = f'(x)\frac{x}{f(x)}.$$

西方经济学中关于市场的价格理论有两个非常重要的函数，一个是需求函数，另外一个是供给函数．这里我们探讨需求函数的弹性．

设某种商品的价格为 p，需求量为 Q，需求函数 $Q=f(p)$ 可导，则称

$$\frac{EQ}{Ep} = f'(p)\cdot\frac{p}{f(p)}$$

为该商品的**需求价格弹性**，简称为**需求弹性**，常记为 ε_p．因为在一般情况下，$Q(p)$ 单调递减，从而 $Q'(p)\leqslant 0$，因此 $\varepsilon_p\leqslant 0$．

需求价格弹性的经济意义是：在商品价格为 p 时，当商品价格上涨（或下跌）1%时，需求量将减少（或增加）$|\varepsilon_p|\%$．

3.2　典型例题分析

3.2.1　题型一：导数与微分的定义问题

例 3.2.1　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cot^2 x[\cos(\sec^2 x)-\cos 1]$．

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(1+\tan^2 x)-\cos 1}{\tan^2 x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\cos(1+u)-\cos 1}{u}$

$=\left.(\cos u)'\right|_{u=1}=-\sin 1$．

例 3.2.2　已知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x-2\Delta x)}{\Delta x}=x^2+\sin x$，试求 $\mathrm{d}f(x)$．

解　由于

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x-2\Delta x)}{\Delta x}=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x-2\Delta x)}{2\Delta x}=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-2\Delta x)-f(x)}{-2\Delta x}$$

$$=2\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=2f'(x),$$

因此 $f'(x)=\dfrac{1}{2}(x^2+\sin x)$，从而

$$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x^2+\sin x)\mathrm{d}x.$$

例 3.2.3　【2006（3）】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则下列结论正确的是（　　）．

（A） $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在　　　　（B） $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在

（C） $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在　　　　（D） $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

解　令 $t=h^2$，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=1,$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故

$$f(0)=\lim_{t\to 0^+}f(t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}\cdot t=1\times 0=0.$$

且

$$1=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'_+(0).$$

故选项 C 正确.

例 3.2.4【2011（3）】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（　　）.

（A） $-2f'(0)$　　（B） $-f'(0)$　　（C） $f'(0)$　　（D） 0

解　根据导数的定义

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}\\&=f'(0)-2f'(0)=-f'(0).\end{aligned}$$

故选项 B 正确.

例 3.2.5　设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的一个充要条件是（　　）.

（A） $\lim\limits_{h\to +\infty}h\,f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ 存在　　　　（B） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在

（C） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(\mathrm{e}^h-1)$ 存在　　　　（D） $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(\cos h-1)$ 存在

解　答案选 C．因为，令 $t=\mathrm{e}^h-1$，则 $h\to 0\Leftrightarrow t\to 0$，从而

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(\mathrm{e}^h-1)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathrm{e}^h-1)}{\mathrm{e}^h-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathrm{e}^h-1)}{\mathrm{e}^h-1}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0).\end{aligned}$$

选项 A 错误．因为令 $t=\dfrac{1}{h}$，则 $h\to +\infty\Leftrightarrow t\to 0^+$，从而

$$\lim_{h\to +\infty}h\,f\left(\frac{1}{h}\right)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'_+(0),$$

即选项 A 中的极限存在仅保证了 $f'_+(0)$ 存在.

选项 B 错误．因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导可以推出极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在．但

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在不一定能推出 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，例如若取函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x\neq0,\end{cases}$ 则有

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1-1}{h}=\lim_{h\to0}0=0,$$

即极限 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在，但函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

选项 D 错误．因为令 $t=\cos(h)-1$，则 $h\to0\Leftrightarrow t\to0^-$，从而

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(\cos h-1)=\lim_{h\to0}\frac{f(\cos h-1)}{\cos h-1}\cdot\frac{\cos h-1}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f(\cos h-1)}{\cos h-1}\cdot\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{t\to0^-}\frac{f(t)-f(0)}{t}=-\frac{1}{2}f'_-(0),$$

即选项 D 中极限存在仅保证了 $f'_-(0)$ 存在.

3.2.2　题型二：分段函数的求导问题

例 3.2.6　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 为可导函数，试求 $f'(x)$.

解　显然当 $x>0$ 时，

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}\sin x-(1-\cos x)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2x\sin x+\cos x-1}{2\sqrt{x^3}};$$

当 $x<0$ 时，$f'(x)=2xg(x)+x^2g'(x)$；

在 $x=0$ 处，由于 $f(0)=0$，故

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2g(x)}{x}=0,$$

从而 $f'(0)=0$．因此

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x\sin x+\cos x-1}{2\sqrt{x^3}}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 2xg(x)+x^2g'(x), & x<0.\end{cases}$$

例 3.2.7　【2012（3）】设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$ $y=f[f(x)]$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=$ ________.

解　由题意 $f(\mathrm{e})=\ln\sqrt{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}$，根据复合函数的链式法则，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f[f(x)]\right|_{x=\mathrm{e}}=f'\left(\frac{1}{2}\right)f'(\mathrm{e}).$$

而

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=(2x-1)'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=2,\quad f'(\mathrm{e})=(\ln\sqrt{x})'\Big|_{x=\mathrm{e}}=\frac{1}{2\mathrm{e}},$$

故

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=2\times\frac{1}{2\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

3.2.3　题型三：导数的几何意义

例 3.2.8 【2003（3）】已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可以通过 a 表示为________.

解　不妨设曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴在 $x=x_0$ 处相切，则

$$y(x_0)=x_0^3-3a^2x_0+b=0,\quad y'(x_0)=3x_0^2-3a^2=0,$$

解得 $x_0=a$ 或者 $x_0=-a$， $b=2a^3$ 或者 $b=-2a^3$，因此 $b^2=4a^6$.

例 3.2.9 【1998（3）】曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$________.

解　由于

$$f'(1)=nx^{n-1}\Big|_{x=1}=n,$$

因此切线方程为 $y-1=n(x-1)$．令 $y=0$，解得 $\xi_n=1-\frac{1}{n}$．故

$$\lim_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{(-n)\times(-1)}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

例 3.2.10　设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且有

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x),x\to 0.$$

求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程.

解　由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，从而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，故 $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)$．而

$$\lim_{x\to 0}f(1+\sin x)-3\lim_{x\to 0}f(1-\sin x)=\lim_{x\to 0}8x+\lim_{x\to 0}o(x),$$

解得 $f(1)=0$．而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}&=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{-3f(1-t)}{t}\end{aligned}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\lim_{t\to 0}\frac{f(1-t)-f(1)}{-t}$$
$$=4f'(1),$$

且

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{x}=8,$$

故 $4f'(1)=8$，从而 $f'(1)=2$，因此，切线方程为 $y-0=2(x-1)$，即 $y=2x-2$．

3.2.4　题型四：导函数的几何特性问题

例 3.2.11　证明下列结论：

（1）若函数 $f(x)$ 可导且为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数；

（2）若函数 $f(x)$ 可导且为偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数；

（3）若函数 $f(x)$ 可导且为周期函数，则 $f'(x)$ 为周期函数，且周期相同．

证　这里只证明结论（1），结论（2）和（3）类似可证．

（1）设 $f(x)$ 可导，且为奇函数，则对于任意的 $x\in D(f)$，有

$$f(-x)=-f(x).$$

等式两边同时对 x 求导数，得

$$f'(-x)\cdot(-1)=-f'(x),$$

即 $f'(-x)=f'(x)$，所以 $f'(x)$ 为偶函数．

例 3.2.12　证明下列结论：

（1）若 $f(x)$ 为奇函数，且 $f'(x_0)=A$，则 $f'(-x_0)=A$；

（2）若 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(x_0)=A$，则 $f'(-x_0)=-A$；

（3）若 $f(x)$ 为周期为 T 的函数，且 $f'(x_0)=A$，则 $f'(x_0+T)=A$．

证　这里只证明结论（1），结论（2）和（3）类似可证．根据导数的定义，得

$$f'(-x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x_0+\Delta x)-f(-x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-f(x_0-\Delta x)+f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=f'(x_0).$$

注：这里的条件仅仅说明函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，没有给出导函数 $f'(x)$ 是否存在，因此不能使用上例的方法，只能按照导数的定义求解．

3.2.5　题型五：利用可导性求参数值（域）

例 3.2.13　已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b\sqrt{x}, & x>1\end{cases}$ 可导，试求 a，b 的值．

解　因为 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，所以 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续，即有

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1).$$

由于 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$， $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a+b$， $f(1)=1$，得 $a+b=1$．又因为 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，所以 $f'_-(1)=f'_+(1)$．而

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)+b(\sqrt{x}-1)}{x-1}$$

$$=a+b\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=a+\frac{b}{2},$$

故 $a+\frac{b}{2}=2$，解得 $a=3, b=-2$．

例 3.2.14　设 $f(x)=\begin{cases}|x|^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 λ 的取值范围是________．

解　显然，当 $\lambda>1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且当 $\lambda>1$ 时，

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}-f(0)}{x-0}\lim_{x\to 0^+}x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}=0;$$

又因为 $f(x)$ 为偶函数，因此

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}=-\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=-f'_+(0)=0,$$

故 $f'(0)=0$．当 $x>0$ 时，$f(x)=|x|^{\lambda}\cos\frac{1}{x}=x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}$，从而

$$f'(x)=\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}.$$

当 $x<0$ 时，$f(x)=|x|^{\lambda}\cos\frac{1}{x}=(-x)^{\lambda}\cos\frac{1}{x}$，从而

$$f'(x)=-\lambda(-x)^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+(-x)^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}.$$

由于 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而

$$\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=f'(0)=0,$$

故 $\lambda>2$．

3.2.6　题型六：高阶导数问题

例 3.2.15【2006（3）】设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$， $f(2)=1$，则 $f'''(2)=$________．

解　由于

$$f''(x)=e^{f(x)}\cdot f'(x)=e^{f(x)}\cdot e^{f(x)}=e^{2f(x)},$$
$$f'''(x)=e^{2f(x)}\cdot 2f'(x)=e^{2f(x)}\cdot 2e^{f(x)}=2e^{3f(x)},$$

故

$$f'''(2)=2e^{3f(2)}=2e^3.$$

例 3.2.16　已知函数 $y=f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f'(2-t)-f'(2)}{t}$.

解　由于

$$\lim_{t\to 0}\frac{f'(2-t)-f'(2)}{t}=-\lim_{t\to 0}\frac{f'(2-t)-f'(2)}{-t}=-f''(2),$$

又因为

$$f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2},$$
$$f''(x)=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}+e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-2\cdot\frac{1}{x^3}\right),$$

所以

$$f''(2)=e^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{16}+e^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{16}e^{-\frac{1}{2}}.$$

例 3.2.17　已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 试求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

解　当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=4x^3\sin\frac{1}{x}+x^4\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

即

$$f'(x)=4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}.$$

当 $x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^3\sin\frac{1}{x}=0,$$

根据二阶导数的定义，有

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(4x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}\right)=0.$$

3.2.7　题型七：反函数、复合函数的求导问题

例 3.2.18　已知函数 $x=y-\dfrac{1}{2}\sin y$ 一定存在反函数 $y=f(x)$，求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$.

解　由于

$$x'_y = 1-\frac{1}{2}\cos y > 0\,,$$

因此

$$f'(x)=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos y}=\frac{2}{2-\cos y}\,.$$

根据复合函数求导法则，有

$$f''(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2}{2-\cos y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{2}{2-\cos y}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-2\sin y}{(2-\cos y)^2}\cdot\frac{2}{2-\cos y}$$
$$=\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}\,.$$

例 3.2.19　已知单调函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=\phi(y)$，且 $y=f(x)$ 二阶可导，$f'(x)\neq 0$，试求 $x=\phi(y)$ 的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$.

解　由反函数求导法则可知，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{f'(x)}\,.$$

根据复合函数求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\,.$$

例 3.2.20　已知函数 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\mathrm{e}^{2x}$，试求 $f'[g(x)]$ 和 $\{f[g(x)]\}'$.

解　由题意

$$f'(x)=\cos x\,,\quad g'(x)=2\mathrm{e}^{2x}\,,$$

所以

$$f'[g(x)]=\cos(\mathrm{e}^{2x})\,,$$

$$\{f[g(x)]\}'=f'[g(x)]\cdot g'(x)=\cos(\mathrm{e}^{2x})\cdot 2\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^{2x}\cos(\mathrm{e}^{2x})\,.$$

注：$f'[g(x)]$ 表示先求导数，再进行复合运算，$\{f[g(x)]\}'$ 表示先进行复合运算，再求导数.

3.2.8　题型八：隐函数的求导问题

例 3.2.21　设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\sin(xy)-\frac{1}{y-x}=1$ 所确定，试求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程.

解　当 $x=0$ 时，$y=-1$．方程 $\sin(xy)-\dfrac{1}{y-x}=1$ 两边同时对 x 求导数得

$$\cos(xy)\cdot(xy)'-\frac{-(y-x)'}{(y-x)^2}=0,$$

从而有

$$\cos(xy)\cdot(y+xy')+\frac{y'-1}{(y-x)^2}=0,$$

将 $x=0$，$y=-1$ 代入上式得

$$-1+\frac{y'(0)-1}{1}=0,$$

解得 $y'(0)=2$，从而 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-(-1)=2(x-0)$，即 $y=2x-1$．

例 3.2.22　已知 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt{x-1}}{(x+4)^2\mathrm{e}^{2x}}$，求 y'．

解　等式两边同时取对数，则有

$$\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-2x,$$

上式两边同时对 x 求导数，并将 y 视为 x 的函数，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{x+4}-2,$$

所以

$$\begin{aligned}y'&=y\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{x+4}-2\right]\\&=\frac{(x+1)\sqrt{x-1}}{(x+4)^2\mathrm{e}^{2x}}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{x+4}-2\right].\end{aligned}$$

3.2.9　题型九：导函数的连续性问题

例 3.2.23　设 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 试求 $f'(x)$ 的表达式，并讨论 $f'(x)$ 的连续性．

解　当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)'=3x^2\sin\frac{1}{x}+x^3\cos\frac{1}{x}\times\left(\frac{1}{x}\right)'=3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}.$$

当 $x=0$ 时，由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0,$$

即 $f'(0)=0$．因此

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left[3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}\right]=0=f'(0)\text{，}$$

因此 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而函数 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

3.2.10　题型十：导数在经济学中的应用

例 3.2.24【2014（3）】设某商品的需求函数为 $Q=40-2p$， p 为商品的价格，则该商品的边际收益为________.

解　由于收益

$$R=pQ=\frac{40-Q}{2}\cdot Q=20Q-\frac{1}{2}Q^2\text{，}$$

因此 $R'(Q)=20-Q$，故该商品的边际收益为 $20-Q$.

例 3.2.25【2009（3）】设某产品的需求函数为 $Q=Q(p)$，其对应价格 p 的弹性为 $\varepsilon_p=0.2$，则当需求为 10 000 件时，价格增加1元会使产品收益增加________元.

解　由于收益

$$R=pQ=pQ(p)\text{,}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=Q(p)+pQ'(p)=Q(p)\left[1+\frac{pQ'(p)}{Q(p)}\right]=Q(p)(1-\varepsilon_p)\text{，}$$

从而

$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\right|_{Q=10000}=(1-0.2)\times 10000=8000\text{ .}$$

因此则当需求为 10 000 件时，价格增加1元会使产品收益增加8000元.

3.3　深 化 训 练

3.3.1　填空题

（1）【2011（3）】设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$________.

（2）设 $y=x^2 2^x+\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$，则 $y'=$________.

（3）设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1,f'(0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(\ln x)-1}{x-1}=$________.

（4）已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 满足 $f(x_0)=2$，则 $f[f'(x_0)]=$________.

（5）【2007（3）】设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$________.

（6）已知 $y^{(n-2)}=f(\ln x)$，其中 f 任意阶可导，则 $y^{(n)}=$________.

（7）【2011（3）】曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^{y}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

（8）某商品的需求函数为 $Q=100\mathrm{e}^{-0.5p}$，则 $p=2$ 时的边际需求为________，需求对价格的弹性为________.

3.3.2　单项选择题

（1）【2007（3）】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是（　　）.

（A）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

（B）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

（C）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

（D）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

（2）【2012（3）】设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^{x}-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$（　　）.

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　　（B）$(-1)^{n}(n-1)!$

（C）$(-1)^{n-1}n!$　　（D）$(-1)^{n}n!$

（3）若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则下列选项不一定正确的是（　　）.

（A）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$　　（B）$\lim\limits_{x\to a}f'(x)=f'(a)$

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a+h)}{h}$ 存在　　（D）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(a)-f(x)}{x-a}$ 存在

（4）设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0)}=\dfrac{1}{4}$，则 $f'(x_0)$ 等于（　　）.

（A）4　　（B）–4　　（C）2　　（D）–2

（5）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处（　　）.

（A）不连续　　（B）连续但不可导　　（C）可导　　（D）不确定

（6）设 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-2\Delta x)}{\Delta x}=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{1+a^2}$　　（B）$-\dfrac{1}{1+a^2}$　　（C）$\dfrac{2}{1+a^2}$　　（D）$-\dfrac{2}{1+a^2}$

（7）设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$\mathrm{d}y$ 与 Δx 是等价无穷小量　　（B）$\mathrm{d}y$ 是比 Δx 高阶的无穷小量

（C）$\Delta y-\mathrm{d}y$ 是比 Δx 高阶的无穷小量　　（D）$\Delta y-\mathrm{d}y$ 与 Δx 是同阶无穷小量

（8）若下列极限都存在，则下列等式成立的是（　　）.

（A）$\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$　　（B）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-x)}{x}=f'(x_0)$

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=f'(a)$　　（D）$\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

（9）设函数 $f(x)$ 对 $\forall x\in R$ 均满足 $f(-x)=f(x)$，且 $f'(-x_0)=2$，则 $f'(x_0)=$（　　）.

（A）2　　（B）-2　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$-\dfrac{1}{2}$

（10）【2007（3）】设某商品的需求函数为 $Q=160-2p$，其中 p 为价格，若该商品的需求弹性的绝对值等于1，则商品的价格为（　　）.

（A）10　　（B）20　　（C）30　　（D）40

3.3.3　已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=0$，$f'(1)=2$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n$.

3.3.4　设 $f(x)$ 为可导的偶函数，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x-1)-f(1)}{x-1}=\dfrac{1}{2}$，求 $f'(-1)$.

3.3.5　【2015（3）】（1）设函数 $u(x),v(x)$ 可导，利用导数定义证明：$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

（2）设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

3.3.6　已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且周期为 5，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1+2x)}{x}=\dfrac{1}{4}$，试求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,1)$ 处的切线方程.

3.3.7　已知 $g(x)$ 具有连续导数，$f(x)=(x-a)^2g(x)$，试求 $f'(a)$ 和 $f''(a)$.

3.3.8　设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(ax+b), & x\geqslant 0,\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，试求常数 a,b 的值.

3.3.9　设 $y=f(\ln x)+\ln f(x)$，其中 $f(x)$ 二阶可导，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

3.3.10　已知 $y=x\cdot f\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$，其中 f 二阶可导，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

3.3.11　设函数 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin(2x)+\cdots+a_n\sin(nx)$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为实数，且 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，试证明 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$.

3.3.12　设函数 $y=f(x)$ 是由方程 $\mathrm{e}^x+xy+\mathrm{e}^y=2$ 所确定的隐函数，试求 $y'(0)$ 和 $y''(0)$.

3.3.13　设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $f'(x)\neq 0$，$x=\phi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，试将 $x=\phi(y)$ 所满足的方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变换为 $y=f(x)$ 的方程.

3.3.14　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，且 $f'(1)=a$，$(a\neq 0)$，对 $\forall x,y\in(0,+\infty)$ 有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，试求 $f'(x)$.

3.3.15　设函数 $y_1=f(x)$ 和 $y_2=g(x)$ 的弹性分别为 a 和 b，试求 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$（$g(x)\neq 0$）的弹性.

3.4　深化训练详解

3.3.1　填空题

（1）$(1+3x)\mathrm{e}^{3x}$；**提示**

$$f(x)=x\cdot\lim_{t\to 0}(1+3t)^{\frac{1}{3t}\cdot(3x)}=x\mathrm{e}^{3x},\quad f'(x)=\mathrm{e}^{3x}+3x\mathrm{e}^{3x}=(1+3x)\mathrm{e}^{3x}.$$

（2）$x2^{x}(2+x\ln 2)$；

（3）-1；**提示**　令 $t=\ln x$，则

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-1}{\mathrm{e}^{t}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t)-f(0)}{t}=f'(0)=-1.$$

（4）$-\dfrac{1}{3}$；

（5）$\dfrac{(-1)^{n}2^{n}n!}{3^{n+1}}$；**提示**　$y=\dfrac{1}{2x+3}=(2x+3)^{-1}$，

$$y'=-(2x+3)^{-2},\quad y''=(-1)(-2)2^{2}(2x+3)^{-3},\quad y'''=(-1)(-2)(-3)2^{3}(2x+3)^{-4},$$

一般地

$$y^{(n)}=(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)2^{n}(2x+3)^{-(n+1)}.$$

因此

$$y^{(n)}(0)=(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)2^{n}3^{-(n+1)}=\frac{(-1)^{n}2^{n}n!}{3^{n+1}}.$$

（6）$\dfrac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^{2}}$；

（7）$y=-2x$；**提示** 方程两边同时对 x 求导数，得

$$(1+y')\sec^{2}\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^{y}\cdot y',$$

当 $x=0,y=0$ 时，解得 $y'(0)=-2$，故切线方程为 $y=-2x$．

（8）$-50\mathrm{e}^{-1}$；-1．

3.3.2　单项选择题

（1）D；**提示**　由于 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=0$，故选项 A 正确．类似方法可以证明选项 B 正确．若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0),$$

从而选项 C 正确．选项 D 不一定正确，因为若取 $f(x)=|x|$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，但 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

（2）A；**提示**　由题意可得，$f(0)=0$，且

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}=\lim_{x\to 0}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$$
$$=(1-2)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!\,.$$

（3）B；　（4）D；　（5）A；　（6）D；　（7）C；　（8）B；　（9）B；

（10）D；**提示**　根据需求弹性的定义，

$$|\varepsilon_p|=\left|p\cdot\frac{Q'(p)}{Q(p)}\right|=\left|p\cdot\frac{-2}{160-2p}\right|=1\,,$$

解得 $p=40$.

3.3.3　结合第二个重要极限和导数的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{f\left(1+\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)}{\frac{1}{n}}}=e^{f'(1)}=e^2\,.$$

3.3.4　令 $t=x-1$，则

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(2x-1)-f(1)}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{f(2t+1)-f(1)}{t}=2\lim_{t\to 0}\frac{f(2t+1)-f(1)}{2t}=2f'(1)\,.$$

所以 $f'(1)=\dfrac{1}{4}$，$f'(-1)=-\dfrac{1}{4}$.

3.3.5　（1）因为 $u(x),v(x)$ 可导，因此根据导数的定义，有

$$u'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\,,\quad v'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\,,$$

因此

$$[u(x)v(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$
$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\,.$$

（2）$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$ 的导数为

$$f'(x)=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)\,.$$

3.3.6　由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1+2x)}{x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{f(1+2x)-f(1)}{2x}=-2f'(1)=\frac{1}{4}\,,$$

从而 $f'(1)=-\dfrac{1}{8}$．又因为 $f(x)$ 为周期为 5 的周期函数，因此

$$f'(6)=f'(1+5)=f'(1)=-\frac{1}{8}.$$

从而曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,1)$ 处的切线方程为

$$y-1=-\frac{1}{8}(x-6).$$

3.3.7　由于

$$f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x),$$

故 $f'(a)=0$．根据二阶导数的定义，有

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}[2g(x)+(x-a)g'(x)]=2g(a).$$

3.3.8　由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可知，因此

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0),$$

从而 $\ln b=0$，解得 $b=1$．又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，故 $f'_-(0)=f'_+(0)$，而

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-0}{x}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(ax+1)-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x}=a,$$

从而 $a=1$．

3.3.9　结合复合函数求导法则，有

$$y'=\frac{1}{x}f'(\ln x)+\frac{f'(x)}{f(x)},$$

$$y''=-\frac{1}{x^2}f'(\ln x)+\frac{1}{x^2}f''(\ln x)+\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}.$$

3.3.10　结合复合函数求导法则，有

$$y'=f\left(\frac{\sin x}{x}\right)+x\cdot f'\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=y''=f''\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{(x\cos x-\sin x)^2}{x^3}-f'\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\sin x.$$

3.3.11　显然 $f(0)=0$，由于

$$f'(x)=a_1\cos x+2a_2\cos(2x)+\cdots+na_n\cos(nx),$$

从而

$$f'(0)=a_1+2a_2+\cdots+na.$$

又因为 $|f(x)|\leqslant|\sin x|\leqslant|x|$，因此当 $x\neq 0$ 时，有

$$-1\leqslant\frac{f(x)}{x}\leqslant 1.$$

而

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},$$

根据极限的保号性可知，$-1\leqslant f'(0)\leqslant 1$，从而$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$.

3.3.12　等式两边同时对 x 求导数，得

$$\mathrm{e}^x+y+xy'+\mathrm{e}^y\cdot y'=0,$$

上式两边同时再对 x 求导数，得

$$\mathrm{e}^x+y'+y'+xy''+\mathrm{e}^y\cdot(y')^2+\mathrm{e}^y\cdot y''=0,$$

将 $x=0,y=0$ 代入上述两个方程，解得

$$y'(0)=-1,\quad y''(0)=0.$$

3.3.13　由题意，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{y'},\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}=-\frac{y''}{(y')^3},$$

故

$$-\frac{y''}{(y')^3}+(y+\sin x)\left(\frac{1}{y'}\right)^3=0,$$

从而有

$$y''-y-\sin x=0.$$

3.3.14　由题意，$f(1)=0$，根据导数的定义，有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\frac{1}{x}=f'(1)\cdot\frac{1}{x}=\frac{a}{x}.\end{aligned}$$

3.3.15　根据弹性的定义

$$\begin{aligned}\frac{Ey}{Ex}&=x\cdot\frac{\left(\frac{y_1}{y_2}\right)'}{\frac{y_1}{y_2}}=x\cdot\frac{y_2}{y_1}\cdot\frac{y_1'\cdot y_2-y_1\cdot y_2'}{y_2^2}=x\cdot\frac{y_1'\cdot y_2-y_1\cdot y_2'}{y_2y_1}\\&=x\cdot\frac{y_1'}{y_1}-x\cdot\frac{y_2'}{y_2}=a-b.\end{aligned}$$

3.5　综合提高训练

例 3.5.1　已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线在 y 轴上的截距为 -1，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n=$ ________.

解　由题意，$f(1)=0$，在点 $(1,0)$ 处的切线方程为

$$y-0=f'(1)(x-1),$$

又因为切线在 y 轴上的截距为 -1，即当 $x=0$ 时，$y=-1$，故 $f'(1)=1$. 结合第二个重要极限和导数的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+f\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{f\left(1+\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)}{\frac{1}{n}}}=\mathrm{e}^{f'(1)}=\mathrm{e}.$$

例 3.5.2　【2013（3）】设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=$ ________.

解　曲线 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线斜率为 $y'\big|_{x=1}=1$，而 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，因此有

$$f(1)=0,\quad f'(1)=1.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1-\frac{2}{n+2}\right)-f(1)}{-\frac{2}{n+2}}\cdot\left(-\frac{2n}{n+2}\right)=-2f'(1)=-2.$$

例 3.5.3　设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，试讨论 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的可导性.

解　由于

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x^3|^n}=\max\{1,|x^3|\},$$

即

$$f(x)=\begin{cases}-x^3, & x<-1,\\ 1, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x^3, & x>1.\end{cases}$$

由于

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1^-}\frac{-x^3-1}{x+1}=-1,$$

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1^+}\frac{1-1}{x+1}=0,$$

故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处不可导，类似地可以证明 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(-1,1)$ 以及 $(1,+\infty)$ 内均为基本初等函数，因而在上述区间内 $f(x)$ 均可导.

第 4 章　中值定理与导数的应用

4.1　知 识 要 点

4.1.1　中值定理

（1）**罗尔中值定理**　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

（2）**拉格朗日中值定理**　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，或 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

（3）**柯西中值定理**　若 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

（4）**泰勒定理**　若 $f(x)$ 在含有 x_0 的一个开区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数，则对于任意 $x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 为余项.

当 $x_0=0$ 时的泰勒公式也称为**麦克劳林公式**，即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x).$$

拉格朗日余项：$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$，其中 ξ 是介于 x_0 与 x 之间的某个数.

皮亚诺余项：$R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$，$x\to x_0$.

4.1.2　洛必达法则

（1）$\dfrac{0}{0}$ 型不定式　若

① 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to 0$，$g(x)\to 0$；

② 在 x_0 的某个空心邻域内，$f'(x)$ 和 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x)\neq 0$；

③ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

（2）$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式　若

① 当$x \to \infty$时，$f(x) \to \infty$，$g(x) \to \infty$；

② 当$|x|$充分大时，$f'(x)$和$g'(x)$都存在且$g'(x) \neq 0$；

③ $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为无穷大，则

$$\lim_{x \to \infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

（3）其他类型不定式

其他类型的不定式，如$0 \cdot \infty$，$\infty - \infty$，0^0，∞^0，1^∞等可以转化成$\dfrac{0}{0}$类型或者$\dfrac{\infty}{\infty}$类型的不定式，再使用洛必达法则进行计算.

4.1.3　函数的单调区间

设函数$y = f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导：

（1）若对$\forall x \in (a,b)$有$f'(x) \geqslant 0$，但等号仅仅在有限个点处成立，则$y = f(x)$在$[a,b]$上单调递增；

（2）若对$\forall x \in (a,b)$有$f'(x) \leqslant 0$，但等号仅仅在有限个点处成立，则$y = f(x)$在$[a,b]$上单调递减.

4.1.4　函数的极值与最值

函数的极值只能在两类点处取到，即在驻点处取得，或在不可导点处取得. 函数的极值是一个局部概念，函数的最值是一个整体概念.

连续函数在闭区间$[a,b]$上的最值只能在两类点处取得，即或在区间的端点处取得，或在内部的极值点处取得.

（1）必要条件：若$f(x)$在x_0处可导，且在x_0处取得极值，则$f'(x_0) = 0$.

（2）第一充分条件：设函数$f(x)$在x_0的某个邻域内连续，

① 若在点x_0的左邻域内$f'(x) > 0$，在点x_0的右邻域内$f'(x) < 0$，则$f(x)$在x_0处取得极大值$f(x_0)$；

② 若在点x_0的左邻域内$f'(x) < 0$，在点x_0的右邻域内$f'(x) > 0$，则$f(x)$在x_0处取得极小值$f(x_0)$；

③ 若在点x_0的某个去心邻域内，$f'(x)$不变号，则$f(x)$在x_0处没有极值.

（3）第二充分条件：设函数$f(x)$在x_0处具有二阶导数，且$f'(x_0) = 0$，$f''(x_0) \neq 0$，若$f''(x_0) < 0$，则$f(x)$在x_0处取得极大值$f(x_0)$；若$f''(x_0) > 0$，则$f(x)$在x_0处取得极小值$f(x_0)$.

4.1.5　函数的凹凸区间与拐点

设函数$y = f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有二阶导数，

（1）若对于$\forall x \in (a,b)$有$f''(x) > 0$，则$y = f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的；

（2）若对于$\forall x \in (a,b)$有$f''(x) < 0$，则$y = f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的；

（3）若 $f''(x_0)=0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在，但 $f''(x)$ 在 x_0 点的两侧变号，则 $(x_0,f(x_0))$ 为图形的拐点.

函数的拐点只可能为两类点，即二阶导数等于 0 的点或二阶导数不存在的点.

4.1.6　曲线的渐近线

1．水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$，则直线 $y=a$ 为函数 $y=f(x)$ 图形的水平渐近线.

2．铅垂（垂直）渐近性

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 为函数 $y=f(x)$ 图形的铅垂渐近线.

3．斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$，其中 $a\neq 0$，则直线 $y=ax+b$ 为函数 $y=f(x)$ 图形的斜渐近线，其中

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax];$$

或

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax].$$

注：$y=f(x)$ 作为 x 的函数，在同一水平方向上（例如沿着 x 轴的正方向或沿着 x 轴的负方向），水平渐近线和斜渐近线不可能同时存在.

4.1.7　函数作图

函数作图的步骤：

（1）确定函数 $f(x)$ 的定义域，讨论函数的几何特性（如奇偶性、周期性、有界性等），并确定函数的间断点；

（2）求出 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x)$，二阶导数 $f''(x)$，及 $f'(x)=0$，$f''(x)=0$，$f'(x)$ 不存在，$f''(x)$ 不存在的点；

（3）由 $f(x)$ 的驻点、一阶导数不存在的点、二阶导数为零的点及二阶导数不存在的点等将定义域分成若干个区间，在这些区间上分别讨论 $f'(x)$、$f''(x)$ 的符号，确定 $f(x)$ 的增减性与图形的凹凸性，从而确定极值点与拐点；

（4）求出 $f(x)$ 的各种渐近线；

（5）补充一些特殊点的函数值，如与坐标轴的交点等；

（6）最后勾画出一张较为精确的函数图形.

4.1.8　一些常用的麦克劳林公式

当 $x\to 0$ 时，有

（1）$\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+o(x^n)$；

（2）$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$；

（3）$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$；

（4）$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$；

（5）$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$；

（6）$(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$.

4.2　典型例题分析

4.2.1　题型一：利用中值定理证明等式问题

例 4.2.1【2003（3）】 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证　由于 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，故在 $[0,2]$ 上存在最大值 M 和最小值 m，从而

$$3m \leqslant f(0)+f(1)+f(2) \leqslant 3M,$$

即

$$m \leqslant \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} = 1 \leqslant M .$$

由连续函数的介值定理可知，至少存在一点 $\xi_1\in[0,2]$，使得 $f(\xi_1)=1$．又因为 $f(3)=1$，故 $f(x)$ 在 $[\xi_1,3]$ 上满足罗尔定理的条件，由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,3)\subset(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

例 4.2.2　已知 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f(1)=0$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

证　因为 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，从而

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0,$$

且

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0 .$$

由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$ 可知，至少存在一点 $\xi_1\in(0,1)$，使得 $f'(\xi_1)=0$. 又因为 $f'(x)$ 在 $[0,\xi_1]$ 上满足罗尔定理的条件，因此至少存在一点 $\xi\in(0,\xi_1)\subset(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

例 4.2.3 【1999（3）】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，试证：

（1）存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f(\eta)=\eta$；

（2）对任意的实数 λ，都存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

分析　要证明 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$，只需证 $[f'(\xi)-1]-\lambda[f(\xi)-\xi]=0$，注意到

$$[f(x)-x]'=f'(x)-1,$$

因此可构造辅助函数 $F(x)=[f(x)-x]\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

证　（1）构造辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-x$，显然 $\varphi(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续，且

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0,\quad \varphi(1)=f(1)-1=-1<0,$$

由零点定理可知，至少存在一点 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $\varphi(\eta)=0$，即有 $f(\eta)=\eta$.

（2）构造辅助函数 $F(x)=[f(x)-x]\mathrm{e}^{-\lambda x}$，显然 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，在 $(0,\eta)$ 内可导，且

$$F(0)=[f(0)-0]\times 1=0,\quad F(\eta)=[f(\eta)-\eta]\mathrm{e}^{-\lambda\eta}=0,$$

因此由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $F'(\xi)=0$. 而

$$F'(x)=[f'(x)-1]\mathrm{e}^{-\lambda x}-\lambda[f(x)-x]\mathrm{e}^{-\lambda x},$$

故

$$F'(\xi)=[f'(\xi)-1]\mathrm{e}^{-\lambda\xi}-\lambda[f(\xi)-\xi]\mathrm{e}^{-\lambda\xi}=0,$$

又因为 $\mathrm{e}^{-\lambda\xi}>0$，从而 $f'(\xi)-1-\lambda[f(\xi)-\xi]=0$，即有 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

例 4.2.4　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明在 (a,b) 内至少存在两点 ξ,η，使得 $f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

证　由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上符合拉格朗日中值定理的条件，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

另一方面，$f(x)$ 与 $g(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上符合柯西中值定理条件，则至少存在一点 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}.$$

所以有

$$\frac{(a+b)f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

从而

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

例 4.2.5　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$．证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$．

分析　本题也有两个中值 ξ 和 η，因此也需要利用两次中值定理. 首先需要恒等变形，使得含有 ξ,η 的部分分别在等式的一边，再利用中值定理，将此等式化为

$$e^{\eta}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=e^{\xi},$$

等式左端可以理解为 $\left[f(x)e^{x}\right]'\Big|_{x=\eta}$，等式的右端可以理解为 $(e^{x})'\Big|_{x=\xi}$，因此可以考虑使用两次拉格朗日中值定理.

证　构造辅助函数

$$F(x)=f(x)e^{x},$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上利用拉格朗日中值定理得，存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$F(b)-F(a)=F'(\eta)(b-a),$$

结合 $f(a)=f(b)=1$，整理得

$$e^{b}-e^{a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)](b-a).$$

函数 e^{x} 在 $[a,b]$ 上利用拉格朗日中值定理，从而存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $e^{b}-e^{a}=e^{\xi}(b-a)$．从而 $e^{\eta}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=e^{\xi}$，即 $e^{\eta-\xi}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$.

4.2.2　题型二：利用中值定理证明不等式问题

例4.2.6　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，$f(a)=f(b)=0$，且存在一点 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)>0$，求证至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

证　由于 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上符合拉格朗日中值定理的条件，则至少存在一点 $\xi_1\in(a,c)$，使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)}{c-a}>0.$$

又由于 $f(x)$ 在 $[c,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，则至少存在一点 $\xi_2\in(c,b)$，使得

$$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=\frac{-f(c)}{b-c}<0.$$

函数 $f'(x)$ 在 $\left[\xi_1,\xi_2\right]$ 上再利用拉格朗日中值定理，则至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$$

例 4.2.7　设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上具有二阶导数，且在 $(0,a)$ 内达到最小值，当 $x\in[0,a]$ 时，$|f''(x)|\leqslant M$，证明 $|f'(0)+f'(a)|\leqslant Ma$.

证　由题意知，$\exists x_0 \in (0,a)$，使得 $f'(x_0)=0$， $f'(x)$ 分别在 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,a]$ 上利用拉格朗日中值定理，至少存在两点 $\xi_1 \in (0,x_0)$ 和 $\xi_2 \in (x_0,a)$，使得

$$f'(x_0)-f'(0)=f''(\xi_1)(x_0-0)，\quad f'(a)-f'(x_0)=f''(\xi_2)(a-x_0)，$$

所以 $|f'(0)| \leqslant Mx_0$， $|f'(a)| \leqslant M(a-x_0)$，因此有 $|f'(0)+f'(a)| \leqslant Ma$.

4.2.3　题型三：利用洛必达法则求极限

例 4.2.8　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{nx}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$.

解

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to\infty}\exp\left\{nx\left[\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)-\ln n\right]\right\}\\
&=\lim_{t\to 0}\exp\left\{n\cdot\frac{\ln\left(a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t\right)-\ln n}{t}\right\}\\
&=\exp\left\{n\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t\right)-\ln n}{t}\right\}\\
&=\exp\left\{n\cdot\lim_{t\to 0}\frac{a_1^t\ln a_1+a_2^t\ln a_2+\cdots+a_n^t\ln a_2}{a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t}\right\}\\
&=\exp\{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_2\}\\
&=a_1a_2\cdots a_n .
\end{aligned}$$

例 4.2.9　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 a,b,c 均为正数.

解　由于 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x}}$，

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a^x+b^x+c^x)-\ln 3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c}{(a^x+b^x+c^x)}$$

$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\frac{1}{3}\ln(abc) .$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\ln(abc)}=\sqrt[3]{abc} .$$

例 4.2.10　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点的连续性.

解　当 $x=0$ 时，$f(0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. 当 $x<0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$；当 $x>0$ 时，

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]}.$$

只需计算

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{2x(1+x)}=-\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

4.2.4　题型四：关于函数的单调性与极值问题

例 4.2.11　求函数 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间与极值.

解　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续、可导，且

$$f(x)=2x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}},\quad f'(x)=\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}},$$

令 $f'(x)=0$，解得驻点为 $x_1=0$. 一阶导数不存在的点为 $x_2=1$，列表讨论函数的性态，如表 4.1 所示：

表 4.1　函数的性态

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\ +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 0	↘	极小值 −3	↗

由表 4.1 可知，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,\ 0]$ 和 $[1,\ +\infty)$，单调递减区间为 $[0,1]$；极大值为 $f(0)=0$，极小值为 $f(1)=-3$.

4.2.5　题型五：函数的凹凸性与拐点问题

例 4.2.12　【2014（1，3）】 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $(0,1)$ 上（　　）.

（A）当 $f'(x) \geqslant 0$ 时，$f(x) \geqslant g(x)$

（B）当 $f'(x) \geqslant 0$ 时，$f(x) \leqslant g(x)$

（C）当 $f''(x) \geqslant 0$ 时，$f(x) \geqslant g(x)$

（D）当 $f''(x) \geqslant 0$ 时，$f(x) \leqslant g(x)$

解　正确答案为选项 D．本题考查了曲线凹凸性的概念．当 $f''(x) \geqslant 0$ 时，曲线 $f(x)$ 为凹的，如图 4.1 所示．

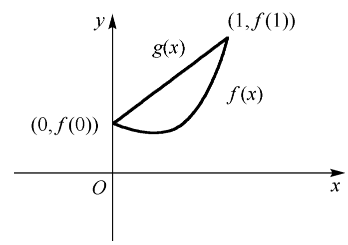


图 4.1　曲线 $f(x)$ 图形

$g(x)$ 为连接点 $(0, f(0))$ 和 $(1, f(1))$ 的直线段，根据凹凸性的定义，显然有 $f(x) \leqslant g(x)$．

注：本题也可以利用辅助函数方法．构造辅助函数

$$F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x\text{，}$$

由于

$$F(0) = F(1) = 0\text{，}\quad F''(x) = f''(x)\text{，}$$

因此当 $f''(x) \geqslant 0$ 时，$F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是凹的，因此当 $x \in [0,1]$ 时，有 $F(x) \leqslant F(0) = F(1) = 0$ 从而有 $f(x) \leqslant g(x)$．

例 4.2.13　求函数 $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^5}$ 的凹凸区间与拐点．

解　函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，

$$f(x) = x^{\frac{8}{3}} - x^{\frac{5}{3}}\text{，}\quad f'(x) = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\text{，}\quad f''(x) = \frac{40}{9}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9}\cdot\frac{4x-1}{\sqrt[3]{x}}\text{，}$$

解得二阶导数等于零的点和二阶导数不存在的点为 $x_1 = 0$，$x_2 = \dfrac{1}{4}$，列表讨论函数的性态，如表 4.2 所示：

表 4.2　函数的性态

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$
$f''(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	$\cup$	拐点为 $(0,\ 0)$	$\cap$	拐点为 $\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{16\sqrt[3]{16}}\right)$	$\cup$

由表 4.2 可知，函数 $f(x)$ 的凹区间为 $(-\infty,\ 0]$ 和 $\left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$，凸区间为 $\left[0,\ \dfrac{1}{4}\right]$；拐点为 $(0,0)$ 和 $\left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{3}{16\sqrt[3]{16}}\right)$．

例 4.2.14　【2007（3）】 求 $y = y(x)$ 是由方程 $y\ln y - x + y = 0$ 确定的隐函数，试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性．

解　式子 $y\ln y - x + y = 0$ 两边同时对 x 求导数，得

$$y'\ln y + y' - 1 + y' = 0\text{，}$$

解得 $y' = \dfrac{1}{2+\ln y}$，故

$$y''=\frac{\frac{y'}{y}}{(2+\ln y)^2}=-\frac{1}{y(2+\ln y)^3}.$$

由于 $y''\big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{1}{8}$，且 y'' 在点 $(1,1)$ 的附近是连续函数，故根据连续函数的性质可知，在 $x=1$ 的某个邻域内有 $y''<0$，从而曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近是凸的.

4.2.6　题型六：显式不等式的证明问题

不等式的证明常用的方法有四种：一是利用中值定理证明不等式，二是利用单调性证明不等式，三是利用极值思想证明不等式，四是利用凹凸性证明不等式.

例 4.2.15　证明：当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证　设 $f(t)=\ln(1+t)$，显然 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，因此有

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)\quad(0<\xi<x),$$

因为 $f(0)=0$，$f'(t)=\frac{1}{1+t}$，所以

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi},$$

其中 $0<\xi<x$. 所以

$$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x，即\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

例 4.2.16　证明：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$.

证　设 $f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3$，显然 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上连续的，且在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导，

$$f(0)=0，\quad f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2=(\tan x-x)(\tan x+x),$$

要想证明 $f'(x)>0$，只需证明在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上，$g(x)=\tan x-x>0$ 即可. 由于 $g(x)=\tan x-x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上连续，$g(0)=0$，而在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且

$$g'(x)=\sec^2 x-1=\tan^2 x>0,$$

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增的，因此 $g(x)>g(0)=0$，所以 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调递增的，有 $f(x)>f(0)=0$，即

$$\tan x-x-\frac{1}{3}x^3>0.$$

所以在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，有 $\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$.

例 4.2.17　证明不等式 $e^{\pi} > \pi^{e}$.

分析　$e^{\pi} > \pi^{e} \Leftrightarrow \dfrac{e^{\pi}}{\pi^{e}} > 1$　或　$e^{\pi} > \pi^{e} \Leftrightarrow \pi > e\ln\pi \Leftrightarrow \pi - e\ln\pi > 0$.

证法 1　构造辅助函数 $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x^{e}}$，有

$$f(e)=\frac{e^{e}}{e^{e}}=1,\quad f'(x)=\frac{x^{e}e^{x}-ex^{e-1}e^{x}}{x^{2e}}=\frac{x^{e-1}e^{x}(x-e)}{x^{2e}},$$

当 $x>e$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 内连续且单调递增，$f(e)$ 为最小值.

因此 $f(\pi)>f(e)$，即 $\dfrac{e^{\pi}}{\pi^{e}}>1$，所以有 $e^{\pi}>\pi^{e}$.

证法 2　构造辅助函数 $f(x)=x-e\ln x\ (x>0)$，由于 $f'(x)=1-\dfrac{e}{x}$，令 $f'(x)=0$，解得驻点 $x=e$，又因为 $f''(x)=\dfrac{e}{x^{2}}>0$，故 $f''(e)>0$，因此函数 $f(x)$ 在 $x=e$ 处取得最小值，从而 $f(\pi)>f(e)$，即有 $\pi-e\ln\pi>0$，所以有 $e^{\pi}>\pi^{e}$.

例 4.2.18　【2012（1，3）】　证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^{2}}{2}\quad(-1<x<1)$.

证　令

$$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^{2}}{2},\quad -1<x<1.$$

由于

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)-\sin x-x,$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+x\left(-\frac{1}{(1+x)^{2}}+\frac{1}{(1-x)^{2}}\right)-\cos x-1\\&=\frac{4}{(1-x^{2})^{2}}-\cos x-1,\end{aligned}$$

因此当 $-1<x<1$ 时，$f''(x)>4-1-1=2>0$，故 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内单调递增．由于 $f'(0)=0$，从而当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的最小值点，最小值为 $f(0)=0$．因此对任意的 $x\in(-1,1)$，有

$$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^{2}}{2}\geqslant f(0)=0,$$

从而 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^{2}}{2}$，结论得证.

例 4.2.19　证明对于 $\forall x,y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，有 $\cos\dfrac{x+y}{2}>\dfrac{\cos x+\cos y}{2}$.

证　显然函数 $f(t)=\cos t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续、可导，且

$$f'(t)=-\sin t\,,\quad f''(t)=-\cos t\,,$$

当$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$时，$f''(t)=-\cos t<0$，因此$f(t)=\cos t$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内为凸的，则有对$\forall x,y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，有 $f\left(\frac{x+y}{2}\right)>\frac{f(x)+f(y)}{2}$，即$\cos\frac{x+y}{2}>\frac{\cos x+\cos y}{2}$.

4.2.7　题型七：函数的零点（方程的根）问题

例 4.2.20　证明方程$1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}=0$有且仅有一个实根.

证　令$f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$. 因为$f(x)$在$[0,2]$上连续，且$f(0)=1>0$，$f(2)=-\frac{5}{3}<0$，由零点定理可知，至少存在一点$\xi\in(0,2)$，使得$f(\xi)=0$，从而方程$f(x)=0$至少有一个实根. 又因为

$$f'(x)=-1+x-x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0\,,$$

故$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调递减，从而方程$f(x)=0$至多有一个实根，综上可得$f(x)=0$有且仅有一个实根.

例 4.2.21　讨论函数$f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$的零点.

解　当$x<1$时，$f(x)<0$；当$x>3$时，$f(x)>0$，所以$f(x)$在$(-\infty,1)$和$(3,+\infty)$内无零点. 当$x\in(1,2)\cup(2,3)$时，对函数求导得

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-3)^2}\,,$$

在$(1,2)$与$(2,3)$内，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(1,2)$和$(2,3)$内均单调递减. 又因为

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)=+\infty\,,$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)=-\infty\,,$$

所以在$(1,2)$内，函数$f(x)$有一个零点. 同理在$(2,3)$内，函数$f(x)$有一个零点. 因此$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有两个零点，分别在$(1,2)$与$(2,3)$内.

4.2.8　题型八：渐近线问题

例 4.2.22　确定函数$f(x)=\frac{1}{x-1}+\ln(1+e^{x-1})$的渐近线.

解　由于$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{1}{x-1}+\ln(1+e^{x-1})\right]=\infty$，因此$x=1$是函数的一条铅垂渐近线. 又因为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x-1}+\ln(1+e^{x-1})\right]=+\infty\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x-1}+\ln(1+e^{x-1})\right]=0,$$

因此直线 $y=0$ 是函数的一条水平渐近线．下面讨论 $f(x)$ 的斜渐近线．

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x(x-1)}+\frac{\ln(1+e^{x-1})}{x}\right],$$

显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x(x-1)}=0$，而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{x-1})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-1}}{1+e^{x-1}}=1,$$

因此 $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$．而

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x-1}+\ln(1+e^{x-1})-x\right],$$

显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$，又因为

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(1+e^{x-1})-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(1+e^{x-1})-\ln e^{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^{x-1}}{e^{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e}\right)=-1,$$

即 $b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-1$，故 $y=x-1$ 是函数的一条斜渐近线．

注：$y=f(x)$ 作为 x 的函数在同一个水平方向上 $(x\to+\infty,$ 或 $x\to-\infty)$，水平渐近线和斜渐近线不可能同时存在．由于本题是当 $x\to-\infty$ 时存在水平渐近线，故函数 $y=f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 方向上不存在斜渐近线．

4.2.9　题型九：泰勒公式的应用

例 4.2.23【2015（1，3）】设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$．若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值．

解　当 $x\to0$ 时，有

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

因此当 $x\to0$ 时，有

$$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x=(a+1)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3).$$

由于当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，故

$$a+1=0,\quad b-\frac{a}{2}=0,\quad \frac{a}{3}=k,$$

解得 $a=-1$， $b=-\dfrac{1}{2}$， $k=-\dfrac{1}{3}$.

例 4.2.24　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解　可以使用泰勒公式求极限，因为

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+o(x^4),$$

而

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4),$$

所以

$$\begin{aligned}e^{x^2}+2\cos x-3&=[1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+o(x^4)]+2[1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)]-3\\&=\frac{7}{12}x^4+o(x^4),\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{7}{12}.$$

4.2.10　题型十：应用题

例 4.2.25　【2015（3）】为了实现利润最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型．设 Q 为该商品的需求量， p 为价格， MC 为边际成本， η 为需求弹性 $(\eta>0)$.

（1）证明定价模型为 $p=\dfrac{\mathrm{MC}}{1-\dfrac{1}{\eta}}$ ；

（2）若该商品的成本函数为 $C(Q)=1600+Q^2$ ，需求函数为 $Q=40-p$ ，试由（1）中的定价模型确定此商品的价格.

解　收益函数为 $R=R(Q)=pQ$ ，因此边际收益为

$$\frac{dR}{dQ}=p+Q\cdot\frac{dp}{dQ}=p\left(1+\frac{Q}{p}\cdot\frac{1}{\frac{dQ}{dp}}\right),$$

又因为需求弹性 $\eta=-\dfrac{p}{Q}\cdot\dfrac{dQ}{dp}$ ，因此边际收益函数为 $\dfrac{dR}{dQ}=p\left(1-\dfrac{1}{\eta}\right)$. 为使利润达到最大，需满足 $\dfrac{dR}{dQ}=\mathrm{MC}$ ，即 $p\left(1-\dfrac{1}{\eta}\right)=\mathrm{MC}$ ，从而定价模型为

$$p=\frac{\mathrm{MC}}{1-\frac{1}{\eta}}.$$

（2）由题设，$\mathrm{MC}=C'(Q)=2Q$，$\eta=-\frac{p}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{40-p}$，从而由（1）可知

$$p=\frac{\mathrm{MC}}{1-\frac{1}{\eta}}=\frac{2Q}{1-\frac{40-p}{p}}=\frac{2(40-p)}{1-\frac{40-p}{p}},$$

解得 $p=30$.

例 4.2.26 【2013（3）】设生产某商品的固定成本为 60 000 元，可变成本为 20 元/件，价格函数为 $p=60-\frac{Q}{1000}$（p 是单价，单位：元；Q 是销售量，单位：件）. 已知产销平衡，求：

（1）该商品的边际利润；

（2）当 $p=50$ 时的边际利润，并解释其经济意义；

（3）使得利润最大的定价 p.

解　（1）成本函数和收益函数分别为

$$C=C(Q)=60000+20Q,\quad R=R(Q)=pQ=60Q-\frac{1}{1000}Q^2,$$

因此利润函数为

$$L=L(Q)=R(Q)-C(Q)=-\frac{1}{1000}Q^2+40Q-60000,$$

故该商品的边际利润为

$$L'(Q)=-\frac{1}{500}Q+40.$$

（2）当 $p=50$ 时，$Q=10000$，$L'(10000)=20$. 经济意义为：当 $Q=10000$ 时，再多销售一件产品时所得的利润为 20 元.

（3）令 $L'(Q)=0$，解得 $Q=20000$，且 $L''(Q)=-\frac{1}{500}<0$，因此当 $Q=20000$ 时，利润达到最大，此时 $p=40$.

4.3　深 化 训 练

4.3.1　填空题

（1）函数 $f(x)=\sin^2 x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上满足罗尔中值定理，则 $\xi=$________.

（2）【2010（3）】若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$________.

（3）【2008（3）】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=$________.

（4）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$ 与 $f(1)-f(0)$ 的大小关系为________.

4.3.2 单项选择题

（1）【2014（3）】设 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，当 $x\to 0$ 时，若 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列选项中错误的是（　　）.

（A）$a=0$　　（B）$b=1$　　（C）$c=0$　　（D）$d=\dfrac{1}{6}$

（2）【2000（1）】设 $f(x),g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则 $a<x<b$ 时，有（　　）.

（A）$f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　（B）$f(x)g(a)>f(a)g(x)$

（C）$f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　（D）$f(x)g(x)>f(a)g(a)$

（3）【2003（1）】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图像如图 4.2 所示，则 $f(x)$ 有（　　）.

（A）一个极小值点和两个极大值点　　（B）两个极小值点和一个极大值点

（C）两个极小值点和两个极大值点　　（D）三个极小值点和一个极大值点

（4）【2015（1，3）】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其二阶导函数 $f''(x)$ 的图形如图 4.3 所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

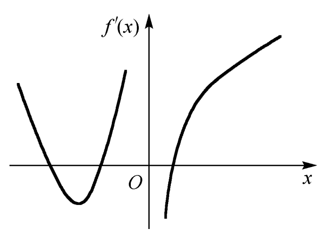


图 4.2　导函数图像

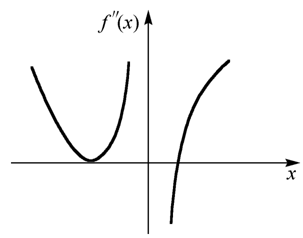


图 4.3　导函数图形

（5）【2013（3）】函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（6）【2012（1，3）】曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（7）【2014（1，3）】下列曲线中有渐近线的是（　　）.

（A）$y=x+\sin x$　　（B）$y=x^2+\sin x$

（C）$y=x+\sin\dfrac{1}{x}$　　（D）$y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

（8）设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二次可微，且 $xf''(x)-f'(x)>0$，则 $\dfrac{f'(x)}{x}$ 在 $(0,a)$ 内是（　　）.

（A）单调不增　　（B）单调不减　　（C）单调递增　　（D）单调递减

（9）【2009（1，3）】当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin(ax)$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（　　）.

（A）$a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　（B）$a=1,b=\dfrac{1}{6}$

（C）$a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　　（D）$a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

4.3.3　求解下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；

（3）【2012（3）】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}$；　　（4）【2010（3）】$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

4.3.4　证明当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}<1$.

4.3.5　【2004（1，2）】设$\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

4.3.6　证明方程$1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}=0$无实根.

4.3.7　【2011（3）】证明：方程$4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$恰有 2 个实根.

4.3.8　【2013（3）】当$x\to 0$时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$与$ax^n$为等价无穷小，求$n$与$a$的值.

4.3.9　设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)=0$，证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

4.3.10　【2009（1，3）】（1）证明拉格朗日中值定理：若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

（2）若函数$f(x)$在$x=0$处连续，在$(0,\delta)$内可导，其中$\delta>0$，且$\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$，则$f'_+(0)$存在，且$f'_+(0)=A$.

4.3.11　【2001（3）】设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)],$$

试求c的值.

4.3.12　求函数$f(x)=\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}$的单调区间、极值.

4.3.13　求函数$y=\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}$的单调区间、极值、凹凸区间、拐点以及渐近线.

4.4　深化训练详解

4.3.1　填空题

（1）0；　　（2）3；

（3）$-\dfrac{1}{6}$；**提示**　结合等价无穷小量替换方法和洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\sin x-x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

（4）$f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$.

4.3.2　单项选择题

（1）D；**提示**　利用麦克劳林展开，有 $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$，从而

$$p(x)-\tan x=a+(b-1)x+cx^2+\left(d-\frac{1}{3}\right)x^3=o(x^3).$$

故 $a=0$， $b=1$， $c=0$， $d=\frac{1}{3}$.

本题也可以利用洛必达法则求解．由于 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{a+bx+cx^2+dx^3-\tan x}{x^3}=0.$$

可推知 $\lim\limits_{x\to 0}(a+bx+cx^2+dx^3-\tan x)=0$，解得 $a=0$．由洛必达法则可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{b+2cx+3dx^2-\sec^2 x}{3x^2}=0,$$

可推知 $\lim\limits_{x\to 0}(b+2cx+3dx^2-\sec^2 x)=0$，解得 $b=1$．因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+2cx+3dx^2-\sec^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2cx+3dx^2-\tan^2 x}{3x^2}=0,$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2c}{3x}+d-\frac{\tan^2 x}{3x^2}\right)=0,$$

因此 $c=0$， $d=\frac{1}{3}$.

（2）A；**提示**　由于

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0,$$

故当 $a<x<b$ 时，有

$$\frac{f(a)}{g(a)}<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{f(b)}{g(b)}.$$

（3）C；根据图 4.2 可知，设 $f'(x)$ 与 x 轴的交点从左到右分别为 a,b,c，则 $f(x)$ 有三个驻点 $x=a$， $x=b$， $x=c$ 以及一个不可导点 $x=0$，根据四个点两侧 $f'(x)$ 的符号可以判断 $x=a$， $x=0$ 为极大值点， $x=b$， $x=c$ 为极小值点．故选项 C 正确．

（4）C；

（5）C；**提示**　$x=0$，$x=-1$，$x=1$ 为间断点．由洛必达法则可知 $\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x|=0$，又因为

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1,$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to -1}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2},$$

因此 $x=0$，$x=1$ 为可去间断点．

（6）C；　（7）C；　（8）C；

（9）A；**提示**　利用麦克劳林展开，当 $x\to 0$ 时，$\sin(ax)=ax-\frac{a^3}{3!}x^3+o(x^3)$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(ax)}{x^2\ln(1-bx)}=-\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x+\frac{a^3}{3!}x^3+o(x^3)}{bx^3},$$

因此

$$\lim_{x\to 0}[1-a\cos(ax)]=\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos(ax)}{3bx^2}\cdot 3bx^2=0,$$

从而 $1-a\cos(a)=0$，解得 $a=1$．

4.3.3　（1）原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\cdot e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\cdot e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[-\frac{1}{x}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}=e^{\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{-t+\ln(1+t)}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{-1+\frac{1}{1+t}}{2t}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{-t}{2t(1+t)}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

（2）原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-(x^x)'}{-1+\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-(e^{x\ln x})'}{-1+\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-e^{x\ln x}(\ln x+1)}{-1+\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-e^{x\ln x}(\ln x+1)}{1-x}\cdot x=\lim_{x\to 1}\frac{1-e^{x\ln x}(\ln x+1)}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-e^{x\ln x}(\ln x+1)^2-e^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{-1}=2.$$

（3）结合等价无穷小量和洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to 0} e^{2-2\cos x}\cdot\frac{e^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}=\lim_{x\to 0} e^{2-2\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{6x^2}=\frac{1}{12}.$$

（4）$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}\exp\left\{\frac{1}{\ln x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}\right\},$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$，因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\left(\frac{\ln x}{x}\right)'}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}\cdot e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-\ln x}{x}}{\frac{\ln x}{x}}\cdot e^{\frac{\ln x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}\cdot e^{\frac{\ln x}{x}}=-1,$$

因此原式$=e^{-1}$.

4.3.4　证法 1　构造辅助函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. 又记 $g(x)=x\cos x-\sin x$，则 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，

$$g'(x)=-x\sin x<0,$$

所以 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，因此当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$g(0)>g(x)$，即 $g(x)<0$，从而有 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减的，即当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(0)>f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，即

$$1>\frac{\sin x}{x}>\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}},$$

从而 $\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$，结论得证.

证法 2　当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，不等式$\frac{\sin x}{x}<1$显然成立，这里只证明不等式$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}$．构造辅助函数

$$f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x，\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$，令$f'(x)=0$，解得唯一驻点$x_0=\arccos\frac{2}{\pi}$，又因为$f''(x)=-\sin x$，因此$f''(x_0)<0$，故函数$f(x)$在$x_0=\arccos\frac{2}{\pi}$处取得唯一极大值．由于$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上连续，因此一定存在最大值和最小值，且最小值只能在$x=0$或$x=\frac{\pi}{2}$处取到．而$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，故当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$f(x)>f(0)=0$，即$\sin x-\frac{2}{\pi}x$，从而有$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}$成立．

4.3.5　令$f(x)=\ln^2 x$，显然$f(x)$在$[a,b]\subset(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$上连续，在$(a,b)$内可导，利用拉格朗日中值定理可知，

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),$$

其中$\mathrm{e}<a<\xi<b<\mathrm{e}^2$．设$g(x)=\frac{\ln x}{x}$，当$x\in(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$时，$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，所以函数$g(x)=\frac{\ln x}{x}$在$[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$上单调递减，因此有

$$\frac{2}{\mathrm{e}^2}=\frac{\ln\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2}<\frac{\ln\xi}{\xi}<\frac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

因此有

$$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a).$$

4.3.6　令$f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$．由于

$$f'(x)=-1+x-x^2+x^3=(x-1)+x^2(x-1)=(x-1)(x^2+1),$$

令$f'(x)=0$，解得唯一驻点$x=1$．又因为$f''(x)=1-2x+3x^2$，从而$f''(1)>0$，因此$f(x)$在$x=1$处取得最小值，最小值为

$$f(1)=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>0,$$

故对于$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有$f(x)\geqslant f(1)>0$，故$f(x)=0$无实根．

4.3.7　构造辅助函数$f(x)=4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$．则

$$f'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1.$$

令$f'(x)=0$，解得$x_1=-\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{3}$．

当 $x\in(-\infty,-\sqrt{3})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{3}]$ 内单调递减；

当 $x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ 内单调递增；

当 $x\in(-\sqrt{3},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $[\sqrt{3},+\infty)$ 内单调递减.

因此 $f(x)$ 在 $x_1=-\sqrt{3}$ 处取得极小值 $f(-\sqrt{3})=0$，在 $x_2=\sqrt{3}$ 处取得极大值 $f(\sqrt{3})=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}>0$，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,\sqrt{3}]$ 内有且仅有一个零点 $x_1=-\sqrt{3}$．又因为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)=-\infty,$$

因此存在一点 $x_3>\sqrt{3}$，使得 $f(x_3)<0$．由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in(\sqrt{3},x_3)$，使得 $f(\xi)=0$，从而 $f(x)$ 在 $[\sqrt{3},+\infty)$ 内有且仅有一个零点.

综上可得，方程 $4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有 2 个实根.

4.3.8　根据等价无穷小量的定义，有

$$\begin{aligned}1&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos(2x)\cos(3x)}{ax^n}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cos(2x)\cos(3x)+2\cos x\sin(2x)\cos(3x)+3\cos x\cos(2x)\sin(3x)}{anx^{n-1}},\end{aligned}$$

由于当 $n=2$ 时，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cos(2x)\cos(3x)}{anx^{n-1}}=\frac{1}{2a},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\cos x\sin(2x)\cos(3x)}{anx^{n-1}}=\frac{4}{2a},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3\cos x\cos(2x)\sin(3x)}{anx^{n-1}}=\frac{9}{2a},$$

因此 $\frac{1+4+9}{2a}=1$，解得 $a=7$．当 $n\neq2$ 时，显然不符合题意，故 $n=2$，$a=7$．

4.3.9　构造辅助函数 $F(x)=e^{g(x)}\cdot f(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，故由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$．又因为

$$F'(x)=e^{g(x)}\cdot f'(x)+e^{g(x)}\cdot g'(x)\cdot f(x),$$

故 $[f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)]e^{g(\xi)}=0$，而 $e^{g(\xi)}>0$，从而 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$．

4.3.10　（1）构造辅助函数

$$F(x)=[f(b)-f(a)]x-f(x)(b-a),$$

显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$F(a)=[f(b)-f(a)]a-f(a)(b-a)=af(b)-bf(a),$$

$$F(b)=[f(b)-f(a)]b-f(b)(b-a)=af(b)-bf(a),$$

从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件，由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$F'(\xi)=0$，而 $F'(x)=f(b)-f(a)-f'(x)(b-a)$，从而

$$f(b)-f(a)-f'(\xi)(b-a)=0,$$

即 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，结论得证.

（2）根据拉格朗日中值定理，有 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，其中 $0<\xi<x$，故

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}f'(\xi)=\lim_{\xi\to 0^+}f'(\xi)=A.$$

4.3.11　由拉格朗日中值定理可知，至少存在一点 $\xi\in(x-1,x)$，使得

$$f(x)-f(x-1)=f'(\xi),$$

因此

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}f'(\xi)=\lim_{\xi\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e}.$$

由题意，显然 $c\neq 0$，又因为

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}\cdot\frac{2cx}{x-c}}=\mathrm{e}^{2c},$$

因此 $2c=1$，解得 $c=\dfrac{1}{2}$.

4.3.12　函数 $f(x)=\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}=(2x-x^2)^{\frac{2}{3}}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$f'(x)=\frac{4}{3}(2x-x^2)^{-\frac{1}{3}}(1-x)=\frac{4(1-x)}{3\cdot\sqrt[3]{x(2-x)}},$$

$x=1$ 为函数的驻点，$x=0$ 与 $x=2$ 为导数不存在的点，列表讨论函数的性态，如表 4.3 所示.

表 4.3　函数的性态

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	—	不存在	+	0	—	不存在	+
$f(x)$	↘	极小值 0	↗	极大值 1	↗	极小值 0	↗

由表 4.3 可知，$f(x)$ 的单调递增区间为 $[0,1]$ 和 $[2,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,0]$ 和 $[1,2]$；极大值为 $f(1)=1$，极小值为 $f(0)=0$.

4.3.13　定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$$y'=\frac{4x(1-x)^2+4x^2(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{4x(1-x)+4x^2}{(1-x)^3}=\frac{4x}{(1-x)^3},$$

$$y''=\frac{4(1-x)^3+12x(1-x)^2}{(1-x)^6}=\frac{4-4x+12x}{(1-x)^4}=\frac{4+8x}{(1-x)^4},$$

显然，$x=0$ 为函数的驻点，当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，二阶导数为 0．列表讨论函数的性态，如表 4.4 所示.

表 4.4　函数的性态

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	—	—	—	0	+	—
$f''(x)$	—	0	+	+	+	+
$f(x)$	↘∩	$\frac{2}{9}$	↘∪	极小值 0	↗∪	↘∪

由表 4.4 可知，$f(x)$ 的单调递增区间为 $[0,1)$，单调递减区间为 $(-\infty,0]$ 和 $(1,+\infty)$；极小值 $f(0)=0$，$f(x)$ 的凹区间为 $\left[-\dfrac{1}{2},1\right)$ 和 $(1,+\infty)$，$f(x)$ 的凸区间为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$，拐点为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{9}\right)$. 又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}=2$，所以 $y=2$ 为水平渐近线；因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}=\infty$，所以直线 $x=1$ 为 $f(x)$ 的铅垂渐近线.

4.5　综合提高训练

例 4.5.1 【2007（3）】设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，又 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：

（1）存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f(\eta)=g(\eta)$；

（2）存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

证 （1）由于 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内存在相等的最大值，不妨设最大值为 M，则存在 $x_1\in(a,b)$，$x_2\in(a,b)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)=M$.

若 $x_1=x_2$，则取 $\eta=x_1$，即有 $f(\eta)=g(\eta)$.

若 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，构造辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$，则

$$\varphi(x_1)=f(x_1)-g(x_1)=M-g(x_1)\geqslant 0,$$

$$\varphi(x_2)=f(x_2)-g(x_2)=f(x_2)-M\leqslant 0,$$

由介值定理可知，存在一点 $\eta\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$，使得 $\varphi(\eta)=0$，即 $f(\eta)=g(\eta)$.

（2）由于 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$ 满足 $\varphi(a)=\varphi(\eta)=\varphi(b)=0$，且 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数，由罗尔定理可知，至少存在两点 $\xi_1\in(a,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,b)$，使得

$$\varphi'(\xi_1)=\varphi'(\xi_2)=0.$$

由题意 $\varphi'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上利用罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$，结论得证.

例 4.5.2 【2013（3）】设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. 证明：

（1）存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$；

（2）对（1）中的 a，存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

证 （1）由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$，根据极限的性质可知，存在 $b>0$，使得 $f(b)>1$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，从而 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上连续，由连续函数的介值定理可知，存在 $a\in(0,b)$，使得 $f(a)=1$.

（2）**证法 1**　构造辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{1}{a}x$，显然 $\varphi(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且

$$\varphi(0)=f(0)-0=0\text{，}\quad \varphi(a)=f(a)-1=0\text{，}$$

根据罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,a)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，从而 $\varphi'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{a}$，故有 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

证法 2　因为 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，根据拉格朗日中值定理可知，存在一点 $\xi\in(0,a)$，使得

$$f(a)-f(0)=f'(\xi)(a-0)\text{，}$$

由 $f(0)=0$，$f(a)=1$ 可知，$f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$，结论得证.

例 4.4.5　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶导数存在，且

$$\lim_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3\text{，}$$

求 $f(0)$，$f'(0)$ 以及 $f''(0)$.

解　由于 $f''(0)$ 存在，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内存在一阶连续的偏导数．又因为

$$\lim_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}}=\mathrm{e}^3.$$

所以等价无穷小替换得

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+\dfrac{f(x)}{x}}{x}=3.$$

从而

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+f(x)}{x^2}=3.$$

从而有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$．由于分母的极限为 0，结合 $f(x)$ 的连续性可知，

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=0.$$

由洛必达法则可知

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=2\text{，}$$

由于分母的极限为 0，结合 $f'(x)$ 的连续性可知，

$$f'(0)=\lim_{x\to0}f'(x)=0.$$

又因为

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0)=2\text{，}$$

从而 $f''(0)=4$.

例 4.5.4　(2011 年北京市竞赛题）设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，证明函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0,\end{cases}$$

具有一阶连续导数.

证　当 $x\neq 0$ 时，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$；在 $x=0$ 处，利用导数的定义，有

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0),$$

又因为

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0),$$

即有 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=g'(0)$，因此 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，结合 $f''(x)$ 的连续性可知，函数 $g'(x)$ 处处连续，结论得证.

例 4.5.5　已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{\sin x}{x^2}\right)=1$，试求 $f'(0)$.

解　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}+f(x)}{x}=1$，可知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}+f(x)\right)=0$，从而

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-1.$$

又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，因此 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$.

$$1=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{\sin x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)+1}{x}+\frac{\sin x}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)+1}{x}+\frac{\sin x-x}{x^2}\right)$$
$$=f'(0)+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=f'(0)+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=f'(0)+\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=f'(0),$$

所以 $f'(0)=1$.

第 5 章　不 定 积 分

5.1　知 识 要 点

5.1.1　不定积分的概念与几何意义

（1）若存在函数 $F(x)$，使得在区间 I 上处处有

$$F'(x) = f(x)\text{，或 } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x\text{，}$$

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**原函数**.

（2）函数 $f(x)$ 的不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 表示的是 $f(x)$ 的全体原函数，若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C .$$

（3）不定积分的几何意义：若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $y = F(x)$ 的图形称为 $f(x)$ 的一条**积分曲线**. $\int f(x)\mathrm{d}x$ 表示的是一族积分曲线，且这族积分曲线在同一个横坐标点处的切线斜率相等.

5.1.2　不定积分的性质

（1）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$；

（2）$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$ 或 $\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C$；

（3）$\int [af(x) + bg(x)]\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x + b\int g(x)\mathrm{d}x$，其中 a, b 不全为 0.

5.1.3　换元积分法

换元积分法分为第一类换元法（凑微分法）和第二类换元法，两类换元积分法的主要区别是，第一类换元法可以理解为先凑微分再做变量替换，第二类换元法是直接变量替换.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则第一类换元积分法的思路为

$$\begin{aligned}\int g(x)\mathrm{d}x &= \int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) \xlongequal{u=\varphi(x)} \int f(u)\mathrm{d}u \\ &= F(u) + C = F[\varphi(x)] + C .\end{aligned}$$

第二类换元积分法的思路为

$$\int g(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int g[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C = F[\varphi^{-1}(x)] + C .$$

第一类换元积分法是求解不定积分的一种常用方法，不过如何适当地选取代换却没有一

般的规律可循，只能具体问题具体分析．要掌握好这种方法，需要熟记一些函数的凑微分公式，并善于根据这些凑微分公式对被积表达式做适当的微分变形，拼凑出合适的微分因子．常见的凑微分公式（设 $f(x)$ 可积）有：

（1）$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)\quad (a\neq 0)$；

（2）$\int \frac{1}{x}f(\ln x)\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$；

（3）$\int x^{n-1}f(ax^n+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{an}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)\quad (a\neq 0)$；

特别地：

$$\int \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=-\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right),\quad \int \frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\mathrm{d}x=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x});$$

（4）$\int a^x f(a^x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\int f(a^x)\mathrm{d}a^x\quad (a>0,a\neq 1)$；

特别地：$\int \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$；

（5）$\int \cos x\cdot f(\sin x)\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x$；

（6）$\int \sin x\cdot f(\cos x)\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}\cos x$；

（7）$\int \sec^2 x\cdot f(\tan x)\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}\tan x$；

（8）$\int \csc^2 x\cdot f(\cot x)\mathrm{d}x=-\int f(\cot x)\mathrm{d}\cot x$；

（9）$\int \frac{1}{1+x^2}f(\arctan x)\mathrm{d}x=\int f(\arctan x)\mathrm{d}\arctan x$；

（10）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(\arcsin x)\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}\arcsin x$；

（11）$\int \sec x\tan x\cdot f(\sec x)\mathrm{d}x=\int f(\sec x)\mathrm{d}\sec x$；

（12）$\int f'(x)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f^2(x)+C$；

（13）$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\ln|f(x)|+C$．

在第二类换元法中，还需要读者重视的几种常用的换元法有（设 $f(x)$ 可积）：

（1）$\int f(x,\sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}x$，可令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$；

（2）若被积函数含有二次根式 $\sqrt{a^2-x^2}\ (a>0)$，可令 $x=a\sin t$，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；

（3）若被积函数含有二次根式 $\sqrt{a^2+x^2}\ (a>0)$，可令 $x=a\tan t$，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；

（4）若被积函数含有二次根式 $\sqrt{x^2-a^2}\ (a>0)$，当 $x>a$ 时，可令 $x=a\sec t$，$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$x<-a$ 时，可令 $u=-x$．

更一般地，常用的第二类换元类型还包括如下情形：

（1）若被积函数同时含有根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ 和 $\sqrt[m]{ax+b}$ ，可令 $t=\sqrt[N]{ax+b}$ ，其中 N 为 n 和 m 的最小公倍数；

（2）$\int f\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$，令 $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ ；

（3）$\int f(x,\sqrt{a^2-b^2x^2})\mathrm{d}x$ ，可令 $x=\dfrac{a}{b}\sin t\quad (a>0,b>0)$ ；

（4）$\int f(x,\sqrt{a^2+b^2x^2})\mathrm{d}x$ ，可令 $x=\dfrac{a}{b}\tan t\quad (a>0,b>0)$ ；

（5）$\int f(x,\sqrt{b^2x^2-a^2})\mathrm{d}x$ ，可令 $x=\dfrac{a}{b}\sec t\quad (a>0,b>0)$ ；

（6）当被积函数含有 $\sqrt{px^2+qx+r}(q^2-4pr<0)$ 时，利用配方与代换可化为以上（3）、（4）、（5）三种情形之一.

5.1.4　分部积分法

分部积分法主要用于求解乘积类型的积分．设 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 具有连续导数，则有

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u .$$

分部积分法的本质是将难于计算的积分 $\int u\mathrm{d}v$ 转化为容易计算的积分 $\int v\mathrm{d}u$，因此在使用该公式时需要选择好适当的 u 和 v ，或者说关键是选择哪个函数凑微分.

常用的凑微分思路有三种:（1）幂函数与指数函数、三角函数相乘时，指数函数、三角函数凑微分；（2）幂函数与对数函数、反三角函数相乘时，幂函数凑微分；（3）指数函数与三角函数相乘时，哪一个凑微分都可以，使用循环积分法.

5.1.5　有理函数的积分法

利用多项式的除法可以将有理函数的积分可以转化为多项式与真分式的积分，而通过真分式的分解可以将真分式的积分转化为如下四大类简单真分式（部分分式）的积分.

（1）$\int\dfrac{A}{x-a}\mathrm{d}x$ ；　　（2）$\int\dfrac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x\ \ (n>1)$ ；

（3）$\int\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x\ \ (p^2-4q<0)$ ；　　（4）$\int\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x\ (p^2-4q<0,n>1)$.

将真分式分解为部分分式之和时，若真分式的分母中含有因式 $(x-a)^k$ ，则分解后的式子应该含有如下表达式

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k} ,$$

若真分式的分母中含有因式 $(x^2+px+q)^k\ (p^2-4q<0)$ ，则分解后的式子应该含有如下表达式

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k} .$$

5.1.6　三角函数有理式的积分法

对于三角函数有理式的积分，一般有以下 2 种方法：

1．半角代换

对于$\int f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$型，如果没有简易的求解方法，可以尝试利用万能替换方法进行求解，即令$u=\tan\dfrac{x}{2}$，则$\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2},\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$.

2．三角恒等变换

（1）利用倍角公式降低三角函数的幂次；

（2）对于$\int\sin mx\cdot\sin nx\mathrm{d}x$、$\int\sin mx\cdot\cos nx\mathrm{d}x$、$\int\cos mx\cdot\cos nx\mathrm{d}x$ $(m\neq n)$等积分类型，可利用积化和差来计算；

（3）对于$\int\sin^m x\cdot\cos^n x\mathrm{d}x$类型：当$m$、$n$中有一个奇数，可拆开利用凑微分法来计算；当$m$、$n$都是偶数，可利用倍角公式逐步求出不定积分；

（4）对于$\int\sin^m x\mathrm{d}x$和$\int\cos^n x\mathrm{d}x$类型，可利用分部积分法导出递推公式计算，也可按上面方法的特例进行处理.

5.1.7　简单无理函数的积分法

简单的无理函数指形如$f(x,\sqrt[n]{ax+b})$, $f\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$,关键是找出适当的变量代换去掉根号，化为有理函数的积分.一般地，采用令$t=\sqrt[n]{ax+b}$或$t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$进行求解.

5.1.8　常用积分公式表

下面列出一些常用的不定积分公式，需要读者熟练记忆.

（1）$\int 0\,\mathrm{d}x=C$；

（2）$\int x^\alpha\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C,\alpha\neq-1$；

（3）$\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$；

（4）$\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln a}a^x+C\quad(a>0,a\neq1)$；

（5）$\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$；

（6）$\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$；

（7）$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$；

（8）$\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$；

（9）$\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$；

（10）$\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$；

（11）$\int \csc x \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

（12）$\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$；

（13）$\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$；

（14）$\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$；

（15）$\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$；

（16）$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0)$；

（17）$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$；

（18）$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$；

（19）$\int \frac{1}{a^2 - x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C \quad (a > 0)$；

（20）$\int \sqrt{a^2 - x^2} \mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$；

（21）$\int \sqrt{x^2 - a^2} \mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2}a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C \quad (a > 0)$；

（22）$\int \sqrt{x^2 + a^2} \mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2}a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \quad (a > 0)$.

5.2　典型例题分析

5.2.1　题型一：不定积分的定义与性质问题

例 5.2.1　若 $f(x)$ 的导数为 $\cos(x)$，求 $f(x)$ 的原函数.

解　因为 $f'(x) = \cos x$，所以

$$f(x) = \int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C_1,$$

故

$$\int f(x) \mathrm{d}x = \int (\sin x + C_1) \mathrm{d}x = -\cos x + C_1 x + C_2,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

注：利用原函数的定义求两次不定积分，从而找到所要求的原函数是求解本题的基本思路，需要读者熟悉原函数的定义及基本积分表，该类型题即可迎刃而解.

例 5.2.2 求不定积分 $\int \mathrm{d}\int \mathrm{d}f(x)$.

解 由不定积分的性质知：

$$\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C,$$

从而

$$\int \mathrm{d}\int \mathrm{d}f(x)=\int \mathrm{d}[f(x)+C]=\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C.$$

注：本题用到了不定积分的性质，以及原函数的定义.

例 5.2.3 设 $f'(\ln x)=x$，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$.

解 令 $t=\ln x$，则 $x=\mathrm{e}^t$ 故 $f'(t)=\mathrm{e}^t$，所以有 $f(t)=\mathrm{e}^t+C$，即

$$f(x)=\mathrm{e}^x+C.$$

又知 $f(0)=1$，解得 $C=0$，故 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

注：$f'(\ln x)=x$ 的含义为 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\ln x}=x$.

5.2.2 题型二：求解分段函数的不定积分

例 5.2.4 设 $f(x)=|x|$，求解不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解 由于

$$f(x)=\begin{cases}x, & x>0,\\ -x, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

因此当 $x>0$ 时，

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+C_1;$$

当 $x\leqslant 0$ 时，

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(-x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}x^2+C_2.$$

因为不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 在 $x=0$ 处连续，故有

$$\frac{1}{2}\times 0^2+C_1=-\frac{1}{2}\times 0^2+C_2,$$

解得 $C_1=C_2$，故

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+C, & x>0,\\ -\dfrac{1}{2}x^2+C, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

注：求分段函数的不定积分时，要注意分段点处函数的连续性.

例 5.2.5 求不定积分 $\int \max\{2,\ |x|\}\mathrm{d}x$.

解 由于

$$\max\{2,\ |x|\}=\begin{cases}-x, & x<-2,\\ 2, & -2\leqslant x<2,\\ x, & x\geqslant 2,\end{cases}$$

当 $x<-2$ 时，$\int(-x)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}x^2+C_1$；

当 $-2\leqslant x<2$ 时，$\int 2\,\mathrm{d}x=2x+C_2$；

当 $x\geqslant 2$ 时，$\int x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2+C_3$.

由于 $\int\max\{2,\ |x|\}\mathrm{d}x$ 在 $x=-2$，$x=2$ 处连续，因此有

$$\lim_{x\to-2^-}\left(-\frac{1}{2}x^2+C_1\right)=\lim_{x\to-2^+}(2x+C_2)，\quad \lim_{x\to2^-}(2x+C_2)=\lim_{x\to2^+}\left(\frac{1}{2}x^2+C_3\right).$$

解得 $C_2=2+C_1$，$C_3=4+C_1$. 从而

$$\int\max\{2,\ |x|\}\mathrm{d}x=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+C, & x<-2,\\ 2x+2+C, & -2\leqslant x<2,\\ \dfrac{1}{2}x^2+4+C, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

5.2.3 题型三：直接积分法求解不定积分

例 5.2.6 求解不定积分 $\int\dfrac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x}\mathrm{d}x$.

解 利用三角恒等式，有

$$\int\frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\sin^2 x}{2\sin^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\csc^2 x+1)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cot x+\frac{1}{2}x+C.$$

注：求解不定积分的一个基本思想就是将分母化为一个式子，这样被积函数就可以表示为一些简单式子的代数和. 本题采用了半角公式将分母化为一个表达式.

例 5.2.7 求解不定积分 $\int\dfrac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 利用分子加一项，再减一项的方式将被积函数表示为一些简单式子的代数和.

$$\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int(x^2-1)\mathrm{d}x+\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C.$$

注：根据被积函数分子、分母的特点，利用常用的恒等变形，例如分解因式、直接拆项、指数公式和三角公式，等等，将被积函数分解成几项之和后再进行求解.

5.2.4　题型四：利用换元积分法求解不定积分

例 5.2.8　求解不定积分$\int\cos^3 x\mathrm{d}x$.

解

$$\int\cos^3 x\mathrm{d}x=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int(1-\sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x)$$

$$=\int\mathrm{d}(\sin x)-\int\sin^2 x\mathrm{d}(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

注：在运用第一类换元法求以三角函数为被积函数的积分时，主要思路就是利用三角恒等式把被积函数化为熟知的积分，通常会用到同角的三角恒等式、倍角、半角公式、积化和差公式等. 对于本题来说，被积函数是奇次幂，从被积函数中分离出$\cos x$，并与$\mathrm{d}x$凑成微分$\mathrm{d}(\sin x)$，再利用三角恒等式$\sin^2 x+\cos^2 x=1$将被积函数化为$1-\sin^2 x$，然后即可积分.

例 5.2.9　求解不定积分$\int\left(x+\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

解

$$\int\left(x+\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x+2\int\sin\sqrt{x}\mathrm{d}\sqrt{x}=\frac{x^2}{2}-2\cos\sqrt{x}+C.$$

例 5.2.10　求解不定积分$\int\frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

解法 1　分子、分母同时乘以因式$1-\cos x$，

$$原式=\int\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x=\int\csc^2 x\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x)$$

$$=-\cot x+\frac{1}{\sin x}+C.$$

解法 2　使用半角公式.

$$原式=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=\tan\frac{x}{2}+C.$$

注：在求解不定积分时，一个常用的技巧就是将分母化为一个式子，然后将积分拆成一些简单积分的代数和，例如例 5.2.6. 本题的两种解法都是用的这个思想.

例 5.2.11　求解不定积分$\int\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.

解法 1　分子、分母同时乘以因式e^x.

$$原式=\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$$

$$\xlongequal{t=\mathrm{e}^x}\int\frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln t-\ln(t+1)+C$$

$$=x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C.$$

解法 2　分子加一项、减一项.

$$\text{原式}=\int\frac{\mathrm{e}^x+1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right)\mathrm{d}x=x-\int\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+1)$$

$$=x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C.$$

例 5.2.12　求解不定积分 $\int\frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

解法 1　由于

$$\int\frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(x^2+1),$$

因此令 $t=1+x^2$，从而

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int\frac{(t-2)t+1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$

解法 2　使用三角替换．令 $x=\tan t$，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，$\sqrt{1+x^2}=\sec t$，因此

$$\text{原式}=\int\frac{\tan^5 t}{\sec t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t=\int\tan^4 t\cdot\tan t\cdot\sec t\mathrm{d}t=\int\tan^4 t\mathrm{d}\sec t$$

$$=\int(\sec^2 t-1)^2\mathrm{d}\sec t=\int(u^4-2u^2+1)\mathrm{d}u=\frac{1}{5}u^5-\frac{2}{3}u^3+u+C$$

$$=\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$

例 5.2.13　求解不定积分 $\int x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

解　令 $x=\sin t$，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，$\sqrt{4-x^2}=2\cos t$，因此

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\int 4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\mathrm{d}t=\int 4\sin^2 2t\cdot\mathrm{d}t$$

$$=\int 2(1-\cos 4t)\mathrm{d}t=2t-\frac{1}{2}\sin 4t+C$$

$$=2t-2\sin t\cos t(1-2\sin^2 t)+C$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)+C.$$

注：对于三角代换，将结果化为原积分变量的函数时，常常借助于直角三角形.

5.2.5　题型五：利用分部积分法求解不定积分

例 5.2.14　求解不定积分 $\int\cos x\ln(\cot x)\mathrm{d}x$.

解　$$\text{原式}=\int\ln(\cot x)\mathrm{d}(\sin x)=\sin x\cdot\ln(\cot x)-\int\sin x\cdot\frac{1}{\cot x}\cdot(-\csc^2 x)\mathrm{d}x$$

$$=\sin x\cdot\ln(\cot x)+\int\sec x\mathrm{d}x=\sin x\ln(\cot x)+\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C.$$

注：在用分部积分法求$\int f(x)\mathrm{d}x$时关键是将被积表达式$\int f(x)\mathrm{d}x$适当分成u和$\mathrm{d}v$两部分. 根据分部积分公式

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u,$$

只有当等式右端的被积表达式$v\mathrm{d}u$比左端的$u\mathrm{d}v$更容易积出时才有意义.

例 5.2.15　【2000（4）】求解不定积分$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　$$\text{原式}=2\int\arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}\sqrt{x}=2\int\arcsin t\,\mathrm{d}t=2t\arcsin t-2\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$=2t\arcsin t+\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}(1-t^2)$$

$$=2\sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C.$$

例 5.2.16　求解不定积分$\int\mathrm{e}^{2x}\cos(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$.

解　令$\mathrm{e}^x=t$，则

$$\text{原式}=\int\mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\int t\cos t\mathrm{d}t=t\sin t-\int\sin t\mathrm{d}t=t\sin t+\cos t+C$$

$$=\mathrm{e}^x\sin\mathrm{e}^x+\cos\mathrm{e}^x+C.$$

例 5.2.17　求解不定积分$\int\csc^3 x\mathrm{d}x$.

解　由于

$$\int\csc^3 x\mathrm{d}x=\int\csc x\cdot(\csc^2 x)\mathrm{d}x=-\int\csc x\mathrm{d}(\cot x)$$

$$=-\csc x\cot x-\int\cot^2 x\cdot\csc x\mathrm{d}x$$

$$=-\csc x\cot x-\int\csc^3 x\mathrm{d}x+\int\csc x\mathrm{d}x$$

$$=-\csc x\cot x-\int\csc^3 x\mathrm{d}x+\ln\left|\csc x-\cot x\right|,$$

从而

$$\int\csc^3 x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\left(\csc x\cot x-\ln\left|\csc x-\cot x\right|\right)+C.$$

注：（1）被积函数含有三角函数的奇次幂，往往可分解成奇次幂和偶次幂的乘积，然后凑微分，再用分部积分法；（2）用分部积分法求不定积分时，有时会出现与所求积分相同的积分，即出现循环积分的情况，这时需要利用循环积分法.

例 5.2.18 【2001（3）】$\int \frac{\arctan(e^x)}{e^{2x}}dx$.

解　原式 $=-\frac{1}{2}\int \arctan(e^x)d(e^{-2x})=-\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan(e^x)+\frac{1}{2}\int e^{-2x}d(\arctan e^x)$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan(e^x)+\frac{1}{2}\int \frac{1}{e^{2x}(1+e^{2x})}d(e^x)\text{，}$$

而

$$\int \frac{1}{e^{2x}(1+e^{2x})}d(e^x)=\int \frac{1}{t^2(1+t^2)}dt=\int \frac{1}{t^2}dt-\int \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=-\frac{1}{t}-\arctan t+C=-e^{-x}-\arctan e^x+C\text{，}$$

所以

$$\int \frac{\arctan(e^x)}{e^{2x}}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan(e^x)-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}\arctan e^x+C .$$

例 5.2.19 （2008 年北京市竞赛题）求解不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$.

解　原式 $=\int \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^x dx=\int \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\cdot e^x dx+\int e^x\tan\frac{x}{2}dx$

$$=\int e^x d\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int e^x\tan\frac{x}{2}dx=e^x\tan\frac{x}{2}-\int e^x\tan\frac{x}{2}dx+\int e^x\tan\frac{x}{2}dx$$

$$=e^x\tan\frac{x}{2}+C .$$

注：在本题中，$-\int e^x\tan\frac{x}{2}dx$ 与 $\int e^x\tan\frac{x}{2}dx$ 互相抵消后不应该为零，而是任意常数 C .

5.2.6 题型六：求解三角函数有理式的不定积分

例 5.2.20 求解不定积分 $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$.

解：令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$， $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$， $dx=\frac{2}{1+u^2}du$，从而

原式 $=\int \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}du=\int \frac{2u+1+u^2-1-u^2}{(1+u)(1+u^2)}du$

$$=\int \frac{(1+u)^2-(1+u^2)}{(1+u)(1+u^2)}du=\int \frac{1+u}{1+u^2}du-\int \frac{1}{1+u}du$$

$$=\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)-\ln|1+u|+C$$

$$=\frac{x}{2}+\ln\left|\sec\frac{x}{2}\right|-\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C .$$

注：三角有理函数的积分问题一般可以通过万能替换方法将其化为有理函数的积分. 虽然万能代换公式总能求出积分，但对于具体的三角有理函数的积分不一定是最简便的方法. 通常要根据被积函数的特点，采用三角公式简化积分. 能使用其他方法求解时，尽量避免使用万能替换，例如例 5.2.21、例 5.2.22 等.

例 5.2.21　求解不定积分 $\int \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

解

$$原式=\int \frac{1}{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{2}{2-\sin^2(2x)}\mathrm{d}x \xlongequal{t=2x} =\int \frac{1}{2-\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int \frac{\sec^2 t}{2\sec^2 t-\tan^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=\int \frac{1}{2+\tan^2 t}\mathrm{d}(\tan t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan t}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

注：本题通过对被积函数进行恒等变形，并结合换元积分法给出了一种比较简捷的解法，避免了使用万能替换方法.

例 5.2.22　求解不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos x}$.

解

$$原式=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}+\int \frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sin^3 x}=2\int \csc 2x\mathrm{d}x+\int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^3 x}$$

$$=\ln|\csc 2x-\cot 2x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C.$$

注：当分母是 $\sin^m x\cos^n x$ 的形式时，常将分子的 1 改写成 $\sin^2 x+\cos^2 x$，然后拆项，使分母中 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的幂次逐步降低直到可利用基本积分公式为止.

例 5.2.23　求解不定积分 $\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x$.

解法 1　令 $u=\tan\frac{x}{2}$, $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$, $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$, 则

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x=\int \frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4}\mathrm{d}u=\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3u^3}-\frac{3}{u}+3u+\frac{u^3}{3}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{24\tan^3\frac{x}{2}}-\frac{3}{8\tan\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{24}\tan^3\frac{x}{2}+C.$$

解法 2　令 $u=\tan x$，$\sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$, 则

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^4}\cdot\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int \frac{1+u^2}{u^4}\mathrm{d}u=-\frac{1}{3u^3}-\frac{1}{u}+C$$

$$=-\frac{1}{3}\cot^3 x-\cot x+C.$$

解法 3　$\displaystyle\int\frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x=\int\csc^2 x(1+\cot^2 x)\mathrm{d}x=\int\csc^2 x\mathrm{d}x+\int\cot^2 x\csc^2 x\mathrm{d}x$

$$=-\cot x-\frac{1}{3}\cot^3 x+C.$$

注：（1）比较以上三种解法，便知万能替换不一定是最佳方法，故三角有理式的计算中应先考虑其他手段，尽量避免使用万能替换.

（2）在计算不定积分时，用不同的方法计算的结果形式可能不一样，但本质相同．验证积分结果是否正确，只要对积分的结果求导数，若其导数等于被积函数，则积分的结果是正确的.

5.2.7　题型七：求解有理函数的不定积分

例 5.2.24 【1999（2）】求解不定积分 $\displaystyle\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{(x-3)+8}{(x-3)^2+2^2}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{(x-3)^2+2^2}\mathrm{d}[(x-3)^2+2^2]+8\int\frac{1}{(x-3)^2+2^2}\mathrm{d}(x-3)\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C\,.\end{aligned}$$

例 5.2.25　求解不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{x^3+4x^2+5x+2}\mathrm{d}x$.

解　由于 x^3+4x^2+5x+2 是三次多项式，分解因式得

$$x^3+4x^2+5x+2=(x^3+x^2)+3(x^2+x)+2(x+1)=(x+1)(x^2+3x+2)=(x+1)^2(x+2)$$

设

$$\frac{1}{(x+1)^2(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}\ ,$$

即

$$(A+B)x^2+(2A+3B+C)x+(A+2B+2C)=1\ ,$$

从而

$$\begin{cases}A+B=0,\\2A+3B+C=0,\\A+2B+2C=1,\end{cases}$$

解得 $A=1$， $B=-1$， $C=1$，因此

$$\int\frac{1}{x^3+4x^2+5x+2}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{x+2}+\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\ln|x+2|-\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+C\,.$$

例 5.2.26　求解不定积分 $\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\mathrm{d}x$.

解　用待定系数法将 $\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}$ 化为部分分式之和．设

$$\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{2x+3}+\frac{C}{2x-5},$$

用 $(2x-1)(2x+3)(2x-5)$ 乘上式的两端得

$$4x^2+4x-11=A(2x+3)(2x-5)+B(2x-1)(2x-5)+C(2x-1)(2x+3),$$

两端都是二次多项式，它们同次幂的系数相等，即

$$\begin{cases}A+B+C=1,\\ -A-3B+C=1,\\ -15A+5B-3C=-11,\end{cases}$$

这是关于 A ， B ， C 的线性方程组，解得 $A=\frac{1}{2}$， $B=-\frac{1}{4}$， $C=\frac{3}{4}$.

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int\frac{1}{2x+3}\mathrm{d}x+\frac{3}{4}\int\frac{1}{2x-5}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\ln|2x-1|-\frac{1}{8}\ln|2x+3|+\frac{3}{8}\ln|2x-5|+C\\&=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right|+C .\end{aligned}$$

注:（1）由于用待定系数法求 A，B，C 的值计算量大，且易出错，可以采用赋值法求 A，B， C 的值．因为等式

$$4x^2+4x-11=A(2x+3)(2x-5)+B(2x-1)(2x-5)+C(2x-1)(2x+3)$$

是恒等式，故可赋予 x 为任何值．令 $x=\frac{1}{2}$，可得 $A=\frac{1}{2}$．同样，令 $x=-\frac{3}{2}$ 得 $B=-\frac{1}{4}$，令 $x=\frac{5}{2}$，得 $C=\frac{3}{4}$.

（2）计算有理函数的积分时，若被积函数为假分式，则需要利用多项式的除法将假分式分解为多项式与真分式之和．真分式的积分可分为 2 步进行，第 1 步：用待定系数法或赋值法将有理分式化为部分分式之和；第 2 步：对各部分分式分别进行积分.

例 5.2.27　求解不定积分 $\int\frac{1}{x^4(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

解　令 $x=\frac{1}{t}$， $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ ，从而

$$原式=\int\frac{-t^4}{t^2+1}\mathrm{d}t=-\int\frac{t^4-1+1}{t^2+1}\mathrm{d}t=-\int(t^2-1)\mathrm{d}t-\int\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=t-\frac{1}{3}t^3-\arctan t+C=\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}-\arctan\frac{1}{x}+C.$$

注：当有理函数的分母中的多项式的次数大于分子多项式的次数时，可尝试用倒代换.

例 5.2.28　求解不定积分 $\int\frac{1}{x(x^n+a)}\mathrm{d}x\quad(a\neq 0)$.

解法 1　原式 $=\frac{1}{a}\int\frac{x^n+a-x^n}{x(x^n+a)}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{a}\int\frac{x^{n-1}}{x^n+a}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{a}\ln x-\frac{1}{na}\ln(x^n+a)+C=\frac{1}{na}\ln\frac{x^n}{x^n+a}+C.$$

解法 2　原式 $=\int\frac{x^{n-1}}{x^n(x^n+a)}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int\frac{1}{x^n(x^n+a)}\mathrm{d}x^n$

$$\xlongequal{t=x^n}\frac{1}{n}\int\frac{1}{t(a+t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{na}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+a}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{na}\ln\frac{t}{t+a}+C$$

$$=\frac{1}{na}\ln\frac{x^n}{x^n+a}+C.$$

解法 3　令 $x=\frac{1}{t}$，则

$$原式=\int\frac{t^{n+1}}{1+at^n}\cdot\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t=-\int\frac{t^{n-1}}{1+at^n}\mathrm{d}t=-\frac{1}{na}\ln(1+at^n)+C$$

$$=\frac{1}{na}\ln\frac{x^n}{x^n+a}+C.$$

解法 4　原式 $=\int\frac{1}{x^{n+1}(1+ax^{-n})}\mathrm{d}x=-\frac{1}{na}\ln(1+ax^{-n})+C=\frac{1}{na}\ln\frac{x^n}{x^n+a}+C.$

注：分子裂项，倒代换和凑微分法是求解分母次幂较高的有理函数不定积分的常用方法.

5.2.8　题型八：求解简单无理函数的不定积分

例 5.2.29　求解不定积分 $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x$.

解法 1　原式 $=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=a\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=a\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(a^2-x^2)$$

$$=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

解法 2　令 $t=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$，则 $x=\frac{a(t^2-1)}{t^2+1}$，$\mathrm{d}x=\frac{4at}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$，因此

$$原式=\int\frac{4at^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t=4a\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t-4a\int\frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

$$=2a\cdot\arctan t-2a\frac{t}{1+t^2}+C=2a\cdot\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

例 5.2.30　求解不定积分$\int\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$.

解　令$t^6=x+1$，则$6t^5\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$，从而

$$原式=\int\frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\mathrm{d}t=6\int\frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t\quad=2t^3-3t^2+6t+6\ln|t+1|+C$$

$$=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[6]{x+1}+6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1)+C.$$

注：被积函数中有开不同次的根式，为了同时去掉根号，选取根指数的最小公倍数.

5.3　深 化 训 练

5.3.1　填空题

（1）若$\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x+C$，则$\int xf(x^2)\mathrm{d}x=$_________.

（2）$\int\frac{x^{15}}{(x^8+1)^2}\mathrm{d}x=$_________.

（3）$\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x}\mathrm{d}x=$_________.

（4）设$f(x)$的一个原函数为$F(x)=\ln^2(x+\sqrt{x^2+1})$，则$\int xf'(x)\mathrm{d}x=$_________.

5.3.2　求解下列不定积分：

（1）$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2(x+b)^2}\quad(a\neq b)$　　（2）$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\quad(|a|\neq|b|)$

（3）$\int\frac{1}{\sqrt{3+2x}+\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$　　（4）$\int\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-a^2}}\mathrm{d}x\quad(0<a<\mathrm{e})$

5.3.3 求解下列不定积分：

（1）$\int\frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}\mathrm{d}x$　　（2）$\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$　　（3）$\int\frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\mathrm{d}x$

5.3.4　求解下列不定积分：

（1）$\int\mathrm{e}^{5x}\sin 4x\mathrm{d}x$　　（2）$\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$

（3）$\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$　　（4）$\int\mathrm{e}^x\cdot\frac{x^2-2x-1}{(x^2-1)^2}\mathrm{d}x$

（5）$\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$.

5.3.5　求解下列不定积分：

（1）$\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$　　（2）$\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$　　（3）$\int\frac{1+\sin x}{\sin 3x+\sin x}\mathrm{d}x$

5.3.6　求解下列不定积分：

（1）$\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$　　（2）$\int\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$　　（3）$\int\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x$

（4）$\dfrac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$　（5）$\displaystyle\int\frac{x^3+4x^2}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x$　（6）$\displaystyle\int\frac{x^5}{x^6-x^3-2}\mathrm{d}x$

5.3.7　求解下列不定积分：

（1）$\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$　（2）$\displaystyle\int\frac{x^2}{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x$

（3）$\displaystyle\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\mathrm{d}x$　（4）【2006（2）】$\displaystyle\int\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

5.3.8　求解下列不定积分$\displaystyle\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$.

5.3.9　求解不定积分$\displaystyle\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}\right]\mathrm{d}x$.

5.3.10　求解不定积分$\displaystyle\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$.

5.3.11　求解不定积分$I_n=\displaystyle\int\ln^n x\mathrm{d}x$，其中$n$为自然数.

5.4　深化训练详解

5.3.1　填空题

（1）$\dfrac{1}{2}\sin x^2+C$；**提示**　等式$\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x+C$两边求导数得$f(x)=\cos x$，因此

$$\int xf(x^2)\mathrm{d}x=\int x\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin x^2+C.$$

（2）$\dfrac{1}{8(x^8+1)}+\dfrac{1}{8}\ln(x^8+1)+C$；**提示**　令$x^8=t$，则$\mathrm{d}t=8x^7\mathrm{d}x$，从而

$$\int\frac{x^{15}}{(x^8+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int\frac{t}{(t+1)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int\frac{1}{t+1}\mathrm{d}(t+1)-\frac{1}{8}\int\frac{1}{(t+1)^2}\mathrm{d}(t+1)$$
$$=\frac{1}{8(x^8+1)}+\frac{1}{8}\ln(x^8+1)+C.$$

（3）$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}+C$；**提示**　$\displaystyle\int\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}+C$.

（4）$\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln^2(x+\sqrt{x^2+1})+C$；**提示**

$$\int x\cdot f'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=xF'(x)-F(x)+C$$
$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln^2(x+\sqrt{x^2+1})+C.$$

5.3.2　（1）原式$=\dfrac{1}{(a-b)^2}\displaystyle\int\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)^2\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}\int\left[\frac{1}{(x+a)^2}+\frac{1}{(x+b)^2}-\frac{2}{(x+a)(x+b)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}\left(-\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)+\frac{2}{(a-b)^3}\int\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|+C\,.$$

（2） 原式$=\frac{1}{b^2-a^2}\int\left[\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{x^2+b^2}\right]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}-\frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b}\right)+C\,.$$

（3） $\int\frac{1}{\sqrt{3+2x}+\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{2x-1}}{(\sqrt{3+2x}+\sqrt{2x-1})(\sqrt{3+2x}-\sqrt{2x-1})}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{4}\int(3+2x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int(2x-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{12}(3+2x)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+C\,.$$

（4）原式$=\int\frac{1}{\mathrm{e}^x\sqrt{1-a^2\mathrm{e}^{-2x}}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1-a^2\mathrm{e}^{-2x}}}\mathrm{d}(a\mathrm{e}^{-x})=-\frac{1}{a}\arcsin(a\mathrm{e}^{-x})+C\,.$

5.3.3 （1） $\int\frac{2^x\cdot3^x}{9^x-4^x}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1}\mathrm{d}\left(\frac{3}{2}\right)^x$

$$=\frac{1}{2(\ln3-\ln2)}\ln\left|\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x+1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2(\ln3-\ln2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C\,.$$

（2） $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C\,.$

（3）当$x>0$， $x=2\tan t$， $\mathrm{d}x=2\sec^2t\mathrm{d}t$， $\sqrt{4+x^2}=2\sec t$， 则

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{4\tan^2t}\cdot\frac{1}{2\sec t}\cdot2\sec^2t\,\mathrm{d}t=\int\frac{\cos t}{4\sin^2t}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{4\sin t}+C=\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x}+C\,.$$

当$x<0$时，令$t=-x$，则$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$，从而

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{t^2\sqrt{4+t^2}}\mathrm{d}t=-\frac{\sqrt{4+t^2}}{4t}+C=\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x}+C.$$

综上可得，当 $x\neq 0$ 时，

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x}+C.$$

5.3.4 （1）$\int \mathrm{e}^{5x}\sin 4x\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\sin 4x\mathrm{d}\mathrm{e}^{5x}=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}\sin 4x-\frac{1}{5}\int\mathrm{e}^{5x}\mathrm{d}\sin 4x$

$$=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}\sin 4x-\frac{4}{5}\int\mathrm{e}^{5x}\cos 4x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}\sin 4x-\frac{4}{5}\int\cos 4x\,\mathrm{d}\frac{\mathrm{e}^{5x}}{5}$$

$$=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}\sin 4x-\frac{4}{5}\left[\frac{\mathrm{e}^{5x}}{5}\cos 4x-\int\frac{\mathrm{e}^{5x}}{5}\mathrm{d}(\cos 4x)\right]$$

$$=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}\sin 4x-\frac{4}{25}\mathrm{e}^{5x}\cos 4x-\frac{16}{25}\int\mathrm{e}^{5x}\sin 4x\mathrm{d}x,$$

移项合并，得

$$\int\mathrm{e}^{5x}\sin 4x\mathrm{d}x=\frac{1}{41}\mathrm{e}^{5x}(5\sin 4x-4\cos 4x)+C.$$

（2）**解法 1**

$$原式=x(\arcsin x)^2-\int x\mathrm{d}(\arcsin x)^2=x(\arcsin x)^2-2\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin x\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\arcsin x$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2\int\mathrm{d}x$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$$

解法 2　令 $\arcsin x=t$，则 $x=\sin t$，$\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，因此

$$原式=\int t^2\mathrm{d}\sin t=t^2\sin t-2\int t\sin t\mathrm{d}t$$

$$=t^2\sin t+2\int t\mathrm{d}\cos t=t^2\sin t+2t\cos t-2\int\cos t\mathrm{d}t$$

$$=t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t+C$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$$

（3）$\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+x^2)$$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C\ .$$

（4）　原式$=\int \mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x-\int \mathrm{e}^x\cdot\frac{2x\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}=\int\frac{\mathrm{e}^x}{x^2-1}\mathrm{d}x+\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$

$$=\int\frac{\mathrm{e}^x}{x^2-1}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{e}^x}{x^2-1}-\int\frac{\mathrm{e}^x}{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2-1}+C\ .$$

（5）**解法 1**　直接利用分部积分公式，则有

$$\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x=x\sin(\ln x)-\int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x\ ,$$

所以

$$\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C\ .$$

解法 2　先换元，再利用分部积分公式.令$\ln x=t$，$\mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$，则

$$\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t=\mathrm{e}^t\sin t-\int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t=\mathrm{e}^t\sin t-\mathrm{e}^t\cos t-\int \mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t\ ,$$

所以

$$\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^t\sin t-\mathrm{e}^t\cos t)+C=\frac{1}{2}x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C\ .$$

5.3.5　（1）原式$=\int\frac{x+\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{2}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$

$$=\int x\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x=x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=x\tan\frac{x}{2}+C\ .$$

（2）　原式$=\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int\sec^2 x\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}(\cos x)=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C\ .$$

（3）　原式$=\int\frac{1+\sin x}{2\sin 2x\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\sin x}{4\sin x\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x\cos^2 x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}(\cos x)+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4\cos x}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}\tan x+C.$$

5.3.6 （1）$\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}\right]\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$

$$=\ln x-\frac{1}{x-1}-\ln(x-1)+C.$$

（2）**解法 1**　使用凑微分法，

$$原式=\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{2+x+\frac{1}{x}}{2-x-\frac{1}{x}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+x^2+1}{\sqrt{2}x-x^2-1}\right|+C.$$

解法 2　使用有理函数积分法，由于

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{1+2x^2+x^4-2x^2}=\frac{1}{(1+x^2)^2-2x^2}=\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1},$$

通分比较同类项的系数可以得到 $A=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$B=\frac{1}{2}$，$C=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，$D=\frac{1}{2}$．因此

$$\int\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x+\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+x^2+1}{\sqrt{2}x-x^2-1}\right|+C.$$

（3）　$原式=\int\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}\mathrm{d}x+\int\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{2}{5}\ln(1+2x)-\frac{1}{5}\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{5}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{5}\ln(1+2x)-\frac{1}{5}\ln(1+x^2)+\frac{1}{5}\arctan x+C\,.$$

（4）设 $\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$，则有

$$x^2+5x+4=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(4A+C)x+4B+D\,,$$

比较两边同次幂的系数，解得 $A=\frac{5}{3}$，$B=1$，$C=-\frac{5}{3}$，$D=0$，从而

$$\int\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{5x+3}{x^2+1}\mathrm{d}x-\frac{5}{3}\int\frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{3}\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x-\frac{5}{3}\int\frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+\arctan x+C\,.$$

（5）由于

$$\frac{x^3+4x^2}{x^2+5x+6}=x-1-\frac{x-6}{x^2+5x+6}=x-1-\frac{9}{x+3}+\frac{8}{x+2}\,,$$

因此

$$原式=\int\left(x-1-\frac{9}{x+3}+\frac{8}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2-x-9\ln|x+3|+8\ln|x+2|+C\,.$$

（6）令 $u=x^3$，$\mathrm{d}u=3x^2\mathrm{d}x$，则

$$\int\frac{x^5}{x^6-x^3-2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x^6-x^3-2}\mathrm{d}(x^3)=\frac{1}{3}\int\frac{u}{u^2-u-2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{u}{(u+1)(u-2)}\mathrm{d}u=\frac{1}{9}\int\left(\frac{1}{u+1}+\frac{2}{u-2}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{9}\ln|u+1|+\frac{2}{9}\ln|u-2|+C=\frac{1}{9}\ln\left|(x^3+1)(x^3-2)^2\right|+C\,.$$

5.3.7　（1）令 $x=\tan t$，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{x^2+1}=\sec t$，$\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，所以

$$原式=\int\tan^2 t\cdot\sec t\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t=\int\sec^5 t\mathrm{d}t-\int\sec^3 t\mathrm{d}t\,.$$

而

$$\int\sec^5 t\mathrm{d}t=\int\sec^3 t\,\mathrm{d}(\tan t)=\tan t\cdot\sec^3 t-3\int\tan t\cdot\sec^2 t\cdot\sec t\cdot\tan t\,\mathrm{d}t$$

$$=\tan t\cdot\sec^3 t-3\int(\sec^2 t-1)\cdot\sec^3 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\tan t\cdot\sec^3 t-3\int\sec^5 t\,\mathrm{d}t+3\int\sec^3 t\,\mathrm{d}t\,,$$

所以

$$\int \sec^5 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\tan t \cdot \sec^3 t + \frac{3}{4}\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t\ .$$

又因为

$$\begin{aligned}\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t &= \int \sec t\,\mathrm{d}(\tan t) = \sec t \cdot \tan t - \int \tan^2 t \cdot \sec t\,\mathrm{d}t \\ &= \sec t \cdot \tan t - \int \sec^3 t\,\mathrm{d}t + \int \sec t\,\mathrm{d}t\ ,\end{aligned}$$

从而

$$\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sec t \cdot \tan t + \frac{1}{2}\ln\left|\sec t + \tan t\right| + C\ .$$

因此

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\tan t \cdot \sec^3 t - \frac{1}{8}\sec t \cdot \tan t - \frac{1}{8}\ln\left|\sec t + \tan t\right| + C \\ &= \frac{1}{4}x \cdot \left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8} \cdot x \cdot \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{8}\ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C\ .\end{aligned}$$

（2）令 $x = \sin t$， $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t$， $1 - x^2 = \cos^2 t$，从而

$$\int \frac{x^2}{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^5 t}\mathrm{d}t = \int \tan^2 t \sec^3 t\mathrm{d}t = \int (\sec^5 t - \sec^3 t)\mathrm{d}t\ ,$$

由习题 5.3.7（1）可知

$$\int \sec^5 t\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sec^3 t \tan t + \frac{3}{4}\int \sec^3 t\mathrm{d}t\ ,$$

$$\int \sec^3 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sec t \tan t + \frac{1}{2}\ln\left|\sec t + \tan t\right| + C\ .$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\sec^3 t \tan t - \frac{1}{4}\int \sec^3 t\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\sec^3 t \tan t - \frac{1}{8}\sec t \tan t - \frac{1}{8}\ln\left|\sec t + \tan t\right| + C \\ &= \frac{x + x^3}{8(1-x^2)^2} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C\ .\end{aligned}$$

（3）令 $x = \sin t$， $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t$， $\sqrt{1-x^2} = \cos t$， $\arcsin x = t$，因此

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{t}{\cos^3 t} \cdot \cos t\mathrm{d}t = \int t \cdot \sec^2 t\mathrm{d}t = \int t\mathrm{d}\tan t \\ &= t\tan t - \int \tan t\mathrm{d}t = t\tan t + \ln|\cos t| + C\end{aligned}$$

$$=\arcsin x\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}+C\ .$$

（4）$\displaystyle\int\frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int\arcsin \mathrm{e}^x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-\mathrm{e}^{-x}\arcsin \mathrm{e}^x+\int \mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\mathrm{d}x$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\arcsin \mathrm{e}^x-\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{(\mathrm{e}^{-x})^2-1}}$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\arcsin \mathrm{e}^x-\ln\left|\mathrm{e}^{-x}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2x}-1}\right|+C\ .$$

5.3.8　当 $x\geqslant 0$ 时，

$$\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}+C_1,$$

当 $x<0$ 时，

$$\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C_2\ .$$

因为函数 $\mathrm{e}^{-|x|}$ 的原函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上每一点都连续，所以

$$\lim_{x\to 0^+}(-\mathrm{e}^{-x}+C_1)=\lim_{x\to 0^-}(\mathrm{e}^{x}+C_2),$$

即

$$-1+C_1=1+C_2,$$

解得 $C_1=2+C_2$，记 $C_2=C$，则

$$\int \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}+2+C, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{x}+C, & x<0.\end{cases}$$

5.3.9　$\displaystyle\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}\right]\mathrm{d}x=\int\frac{f(x)f'^2(x)-f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{f'^2(x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\mathrm{d}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+C\ .$$

5.3.10　因为

$$\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}(1+x^2)=\frac{1}{2}\left[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2\right]+C,$$

因此

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int\arctan x\mathrm{d}[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2]$$

$$=\frac{1}{2}[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2]\arctan x-\frac{1}{2}\int\left[\ln(1+x^2)-\frac{x^2}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2-3]-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+\frac{3x}{2}+C.$$

5.3.11　由于

$$I_n=\int\ln^n x\mathrm{d}x=x\ln^n x-n\int\ln^{n-1}x\mathrm{d}x=x\ln^n x-nI_{n-1},$$

因此，所求递推公式为

$$I_n=x\ln^n x-nI_{n-1},$$

而

$$I_1=\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-\int\mathrm{d}x=x\ln x-x+C.$$

5.5　综合提高训练

例 5.5.1　设 $F'(x)=f(x)$，当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)F(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^x}{2(1+x)^2}$，又 $F(0)=1$，$F(x)>0$，求 $f(x)\ (x\geqslant 0)$.

解　显然

$$2\int f(x)F(x)\mathrm{d}x=2\int F(x)\mathrm{d}F(x)=F^2(x)+C_1,$$

而

$$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{[(x+1)-1]\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+x}\mathrm{d}\mathrm{e}^x-\int\frac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}+\int\frac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}+C_2,$$

因此 $F^2(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}+C$，由 $F(0)=1$，解得 $C=0$，又 $F(x)>0$，故 $F(x)=\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}}$，从而

$$f(x)=\frac{x\mathrm{e}^x}{2(1+x)^2F(x)}=\frac{x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

例 5.5.2　【2002（3）】设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $I=\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

解法 1　令 $u=\sin^2 x$，则 $\sin x=\sqrt{u}$，$x=\arcsin\sqrt{u}$，$f(u)=\dfrac{\arcsin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$，故

$$I=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=-\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}(1-x)=-2\int\arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}\sqrt{1-x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int\sqrt{1-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$$

解法 2　令 $x=\sin^2 t$，则 $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{\sin t}{\cos t}$， $dx=2\cos t\sin t dt$，因此

$$I=\int\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{t}{\sin t}\cdot 2\sin t\cos t dt=-2\int t d\cos t$$

$$=-2t\cos t+2\int\cos t dt=-2t\cos t+2\sin t+C$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$$

例 5.5.3　求解不定积分 $\displaystyle\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$.

解法 1　由于

$$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=\int\frac{xd(e^x-1)}{\sqrt{e^x-1}}=2\int xd(\sqrt{e^x-1})=2x\sqrt{e^x-1}-2\int\sqrt{e^x-1}dx,$$

令 $t=\sqrt{e^x-1}$，则 $x=\ln(1+t^2)$， $dx=\dfrac{2t}{1+t^2}dt$，则

$$\int\sqrt{e^x-1}dx=2\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=2t-2\arctan t+C_1,$$

因此

$$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C.$$

解法 2　令 $\sqrt{e^x-1}=t$，则

$$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=2\int\ln(1+t^2)dt=2t\ln(1+t^2)-4\int\frac{t^2}{1+t^2}dt$$

$$=2t\ln(1+t^2)-4t+4\arctan t+C$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C.$$

例 5.5.4　【2003（3）】求解不定积分 $\displaystyle\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.

解法 1　令 $t=\arctan x$，则 $x=\tan t$， $dx=\sec^2 t dt$，从而

$$\text{原式}=\int\frac{e^t\tan t}{\sec^3 t}\sec^2 t dt=\int\frac{e^t\tan t}{\sec t}dt=\int\sin t\, d(e^t).$$

利用分部积分法有

$$\int\sin t\, d(e^t)=e^t\sin t-\int e^t\cos t\, dt=e^t\sin t-\int\cos t\, d(e^t)$$

$$=e^t\sin t-e^t\cos t-\int e^t\sin t\, dt,$$

因此

$$\int\sin t\, d(e^t)=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C.$$

由 $t=\arctan x$ 可知，$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x=\tan t$，所以

$$\sin t=\frac{\tan t}{\sec t}=\frac{\tan t}{\sqrt{\sec^2 t}}=\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,,\quad \cos t=\frac{\sin t}{\tan t}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,,$$

故

$$原积分=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arctan x}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C=\frac{(x-1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C\,.$$

解法 2 记 $I=\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$，则

$$I=-\int\mathrm{e}^{\arctan x}\,\mathrm{d}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=-\mathrm{e}^{\arctan x}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+\int(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{\arctan x}$$

$$=-\mathrm{e}^{\arctan x}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+\int\mathrm{e}^{\arctan x}\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x\,,$$

$$I=\int\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{\arctan x}=\mathrm{e}^{\arctan x}\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}-\int\mathrm{e}^{\arctan x}\,\mathrm{d}\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}$$

$$=\mathrm{e}^{\arctan x}\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}-\int\mathrm{e}^{\arctan x}\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x\,,$$

因此

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arctan x}\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arctan x}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+C=\frac{(x-1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C\,.$$

例 5.5.5 （2005 年北京市竞赛题）设 $f(x)$ 可导，且

$$\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C\,,$$

求 $f(x)$ 的表达式.

解 等式两边同时求导数得

$$x^3 f'(x)=2x\cos x-x^2\sin x-4\sin x-4x\cos x+6\sin x\,,$$

整理得

$$f'(x)=-\frac{2\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}+\frac{2\sin x}{x^3}\,,$$

又因为

$$\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}(\cos x)=-\frac{1}{x}\cos x+\int\cos x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\cos x-\int\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x\,,$$

所以

$$\int\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\cos x+C\,,$$

利用类似方法可以证明

$$\int \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x - \int \frac{2\sin x}{x^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{x^2}\sin x + C ,$$

因此

$$f(x) = -\frac{\sin x}{x^2} + \frac{\cos x}{x} + C .$$

例 5.5.6 （1990 年北京市竞赛题）求解不定积分 $\int \frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\cdot\sin(2x)}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x$.

解 由于

$$原式=\int \frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\cdot 2\sin x\cos x}{\frac{1}{4}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^2}\mathrm{d}x = 8\int \frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\cdot\sin x\cos x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x = 8\int \frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\cdot\sin x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}(\sin x) ,$$

故令 $t=\sin x$，则

$$\begin{aligned}
原式 &= 8\int \frac{\mathrm{e}^{-t}\cdot t}{(1-t)^2}\mathrm{d}t = -8\int \mathrm{e}^{-t}\left[\frac{1}{1-t}-\frac{1}{(1-t)^2}\right]\mathrm{d}t \\
&= -8\int \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t + 8\int \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t = -8\int \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t + 8\int \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}\frac{1}{1-t} \\
&= -8\int \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t + 8\mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{1}{1-t} - 8\int \frac{1}{1-t}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t} = 8\mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{1}{1-t}+C \\
&= 8\mathrm{e}^{-\sin x}\cdot\frac{1}{1-\sin x}+C .
\end{aligned}$$

例 5.5.7（2006 年北京市竞赛题）已知 $f'(\sin x)=\cos x+\tan x+x$，$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$ 的表达式.

解 令 $u=\sin x$，$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，则 $f'(u)=\sqrt{1-u^2}+\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}+\arcsin u$，

因此

$$f(x)=\int\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\right)\mathrm{d}x ,$$

利用分部积分法，容易得到

$$\int\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\right)\mathrm{d}x = x\arcsin x + C ,$$

因此

$$f(x)=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+x\arcsin x+C ,$$

又因为 $f(0)=1$，所以 $C=1$，故

$$f(x)=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+x\arcsin x+1 .$$

例 5.5.8　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(|x+2|^n+|x|^n)^{\frac{1}{n}}$，求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解　当 $x\leqslant -1$ 时，$f(x)=|x|=-x$，当 $x>-1$ 时，$f(x)=|x+2|=x+2$，因此

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\leqslant -1,\\ x+2, & x>-1,\end{cases}$$

显然函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，故

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+C_1, & x\leqslant -1,\\ \dfrac{1}{2}x^2+2x+C_2, & x>-1,\end{cases}$$

由原函数的连续性可知

$$\lim_{x\to -1^-}\left(-\frac{1}{2}x^2+C_1\right)=\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+C_2\right),$$

故 $C_1=C_2-1$，取 $C_2=C$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2-1+C, & x\leqslant -1,\\ \dfrac{1}{2}x^2+2x+C, & x>-1,\end{cases}$$

例 5.5.9（1995 年北京市竞赛题）设 y 是由方程 $y^3\cdot(x+y)=x^3$ 所确定的隐函数，求 $\int\frac{1}{y^3}\mathrm{d}x$.

解　设 $y=tx$，则方程化为 $(tx)^3(x+tx)=x^3$，从而有

$$x=\frac{1}{t^3(1+t)},\quad y=\frac{1}{t^2(1+t)},$$

因此

$$\mathrm{d}x=-\frac{4t+3}{t^4(1+t)^2}\mathrm{d}t,\quad \frac{1}{y^3}=t^6(1+t)^3,$$

故

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{y^3}\mathrm{d}x&=-\int\frac{4t+3}{t^4(1+t)^2}\cdot t^6(1+t)^3\mathrm{d}t=-\int\frac{4t+3}{t^4(1+t)^2}\cdot t^6(1+t)^2\mathrm{d}t\\&=-\int(4t^4+7t^3+3t^2)\mathrm{d}t=-\frac{4}{5}t^5-\frac{7}{4}t^4-t^3+C\\&=-\frac{4y^5}{5x^5}t^5-\frac{7y^4}{4x^4}-\frac{y^3}{x^3}+C.\end{aligned}$$

注：隐函数求不定积分，常用的方法是将其化为参数方程，然后再进行求解.

例 5.5.10　求解不定积分 $\int\frac{7\cos x-3\sin x}{5\cos x+2\sin x}\mathrm{d}x$.

解　因为

$$(5\cos x+2\sin x)'=2\cos x-5\sin x,$$

所以可设

$$7\cos x-3\sin x=A(5\cos x+2\sin x)+B(5\cos x+2\sin x)',$$

即

$$7\cos x-3\sin x=A(5\cos x+2\sin x)+B(2\cos x-5\sin x),$$

比较系数得

$$\begin{cases}5A+2B=7,\\ 2A-5B=-3,\end{cases}$$

解得 $A=1$，$B=1$，故

$$\begin{aligned}\int\frac{7\cos x-3\sin x}{5\cos x+2\sin x}\mathrm{d}x&=\int\frac{(5\cos x+2\sin x)+(5\cos x+2\sin x)'}{5\cos x+2\sin x}\mathrm{d}x\\&=\int\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}(5\cos x+2\sin x)}{5\cos x+2\sin x}\\&=x+\ln|5\cos x+2\sin x|+C.\end{aligned}$$

例 5.5.11　求解不定积分 $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x$.

解法 1　令 $1-x=t$，$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=-\int\frac{(1-t)^2}{t^{100}}\mathrm{d}t=-\int\frac{t^2-2t+1}{t^{100}}\mathrm{d}t=-\int t^{-98}\mathrm{d}t+2\int t^{-99}\mathrm{d}t-\int t^{-100}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{97}t^{-97}-2\cdot\frac{1}{98}t^{-98}+\frac{1}{99}t^{-99}+C\\&=\frac{1}{97}(1-x)^{-97}-\frac{1}{49}(1-x)^{-98}+\frac{1}{99}(1-x)^{-99}+C.\end{aligned}$$

解法 2

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{(x^2-1)+1}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x=-\int\frac{x+1}{(1-x)^{99}}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{(1-x)-2}{(1-x)^{99}}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{(1-x)^{98}}\mathrm{d}x-2\int\frac{1}{(1-x)^{99}}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{97}(1-x)^{-97}-\frac{1}{49}(1-x)^{-98}+\frac{1}{99}(1-x)^{-99}+C.\end{aligned}$$

解法 3　用分部积分法

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int x^2\mathrm{d}\left[\frac{1}{99}(1-x)^{-99}\right]=\frac{x^2}{99(1-x)^{99}}-\int\frac{2x}{99(1-x)^{99}}\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{99(1-x)^{99}}-\frac{2}{99}\int x\mathrm{d}\left[\frac{1}{98}(1-x)^{-98}\right]\\&=\frac{x^2}{99(1-x)^{99}}-\frac{2}{99}\left[\frac{x}{98(1-x)^{98}}-\frac{1}{98}\int\frac{1}{(1-x)^{98}}\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{x^2}{99(1-x)^{99}}-\frac{1}{99}\cdot\frac{x}{49(1-x)^{98}}-\frac{2}{99\cdot 98}\cdot\frac{1}{97(1-x)^{97}}+C .$$

注：(1) 形如 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的（$P(x)$ 与 $Q(x)$ 均为多项式）有理函数的积分关键是将有理真分式分解成部分分式之和，而部分分式都有具体的积分方法，对于假分式则要化为真分式与多项式之和.

(2) 被积函数 $\frac{x^2}{(1-x)^{100}}$ 是有理真分式，若按有理函数的积分法来处理，那么要确定 A_1，A_2，…，A_{100}，比较麻烦. 所以根据被积函数的特点可以采取裂项、换元等方法先对被积函数进行处理，达到简化计算的目的.

例 5.5.12 【2009（3）】求解不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\ (x>0)$.

解：令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$，则 $x=\frac{1}{t^2-1}$，所以

$$原式=\int \ln(1+t)\mathrm{d}\left(\frac{1}{t^2-1}\right)=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t .$$

由于

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t&=-\frac{1}{2}\int\frac{(t-1)-(t+1)}{(t-1)(t+1)^2}\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(t+1)^2}\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C ,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}原式&=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-C\\&=\frac{\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)}{\frac{1+x}{x}-1}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}\right|-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}-C\\&=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)+C .\end{aligned}$$

注：由于被积函数中含有根号，利用变量替换去掉根号.

例 5.5.13 【2011（3）】求不定积分 $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解法 1　直接利用分部积分法

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= 2\int(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)\mathrm{d}\sqrt{x}\\ &= 2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}-2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\\ &= 2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+\int\frac{\mathrm{d}(1-x)}{\sqrt{1-x}}-4\sqrt{x}\\ &= 2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C\ .\end{aligned}$$

解法 2　先作变量替换，然后再用分部积分法．令 $t=\sqrt{x}$ ，则原式化简得

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int\arcsin t\mathrm{d}t+4\int\ln t\mathrm{d}t\ ,$$

由分部积分法得

$$\begin{aligned}\int\arcsin t\mathrm{d}t &= t\cdot\arcsin t-\int t\mathrm{d}(\arcsin t)=t\cdot\arcsin t-\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\\ &= t\cdot\arcsin t+\sqrt{1-t^2}+C\\ &= \sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+C\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\ln t\mathrm{d}t &= t\cdot\ln t-\int t\mathrm{d}(\ln t)=t\cdot\ln t-\int 1\mathrm{d}t\\ &= t\cdot\ln t-t+C=\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x}-\sqrt{x}+C\ ,\end{aligned}$$

故

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C\ .$$

第 6 章　定　积　分

6.1　知 识 要 点

6.1.1　定积分的定义

函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**定积分**的定义为：在 (a,b) 内任意插入 $n-1$ 个分点 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$，使得 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，在第 i 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\ (i=1,2,\cdots,n)$，$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，若不论区间 $[a,b]$ 如何划分，点 ξ_i 如何选取，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在且为同一个常数，则称该极限值为 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i .$$

此时也称函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**可积**.

关于定积分的几个注解：

（1）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则积分值 I 仅与被积函数 $f(x)$ 和区间 $[a,b]$ 有关系，与积分变量的记法没关系，例如

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t .$$

（2）无界函数一定不可积，或者说函数有界是函数可积必要条件.

（3）若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，或在 $[a,b]$ 上有界且只有有限个间断点，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

（4）$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

6.1.2　定积分的几何意义与物理意义

（1）定积分的几何意义 1：若 $f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 以及 x 轴围成的曲边梯形的面积.

（2）定积分的几何意义 2：若 $f(x)\leqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 以及 x 轴围成的曲边梯形面积的负值.

（3）定积分的几何意义 3：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由 $y=f(x)$，

$x=a$， $x=b$ 以及 x 轴围成平面图形面积的代数和，即等于 x 轴上方的平面图形面积减去 x 轴下方的平面图形面积，如图 6.1 所示，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3$.

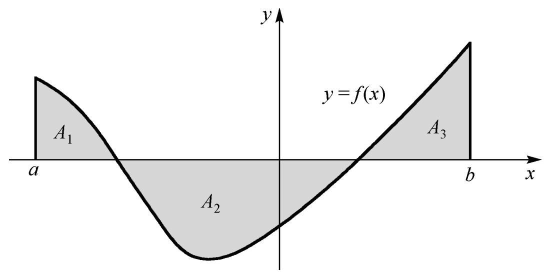


图 6.1　平面图形面积

（4）定积分的物理意义：$\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$ 表示作变速直线运动的物体以速度 $v=v(t)$ 在时间段 $[a,b]$ 内走过的路程.

6.1.3　定积分的基本性质

（1）**线性性质**　设 k 和 l 为常数，则 $\int_a^b [k\,f(x) \pm l\,g(x)]\mathrm{d}x$ 存在，且有

$$\int_a^b [k\,f(x) \pm l\,g(x)]\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm l\int_a^b g(x)\mathrm{d}x .$$

（2）**定积分对区间的可加性**　对于任意的实数 a,b 和 c，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x .$$

（3）**保号性**　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足 $f(x) \geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

（4）若对于 $\forall x \in [a,b]$，有 $f(x) \leqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

（5）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $f(x) \geqslant 0$，且 $f(x)$ 不恒等于 0，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

（6）若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对于 $\forall x \in [a,b]$，有 $f(x) \leqslant g(x)$，且 $f(x)$ 不恒等于 $g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

（7）**估值定理**　若对于 $\forall x \in [a,b]$，有 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) .$$

（8）**积分中值定理**　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) .$$

这里 $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**积分均值**或**平均值**.

注：积分中值定理还可以进一步修正为：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

（9）**积分不等式**　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则有下列不等式

① $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$；

② $\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\cdot\left[\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

6.1.4　变上限积分函数

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，对于 $\forall x\in[a,b]$，$\varPhi(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 称为 $f(x)$ 的**变上限函数**（也称为**积分上限函数**）. 若 $y=f(x)$ 连续，则变上限积分函数 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varPhi(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x).$$

一般地，若 $f(t)$ 连续，函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 可导，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t=f[g(x)]\cdot g'(x);$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\mathrm{d}t=f[h(x)]h'(x)-f[g(x)]g'(x).$$

6.1.5　定积分的计算

（1）**牛顿-莱布尼茨公式**　若 $y=f(x)$ 连续，$F(x)$ 为 $f(x)$ 的任意一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

注：牛顿-莱布尼兹公式也称为微积分基本公式，它给出了定积分与不定积分之间的内在联系.

（2）**定积分的换元积分法**　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上单调，$\varphi(\alpha)=a,\ \ \varphi(\beta)=b$，且 $\varphi'(t)$ 连续，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

（3）**定积分的分部积分法**　设 $u=u(x),v=v(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数，则 $\int_a^b u\mathrm{d}v=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u$.

6.1.6　广义积分

（1）无穷限的广义积分的定义为：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x;\quad \int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

若对某个常数 c，广义积分 $\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x .$$

（2）无界函数的广义积分：若 $x=b$ 为函数 $f(x)$ 的瑕点，则瑕积分

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x .$$

若 a 为瑕点，则瑕积分

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x .$$

若对某个 $c\in(a,b)$，且 c 为瑕点，$\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则称瑕积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\mathrm{d}x .$$

（3）Γ 函数：对于 $\forall t>0$，　$\Gamma(t)=\int_{0}^{+\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$．　Γ 函数的性质主要包括：

$$\Gamma(1)=1；\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}；\ \Gamma(t+1)=t\Gamma(t)；\ \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)；\ \Gamma(n+1)=n!.$$

6.1.7　定积分的几何应用

1．平面图形的面积

如图 6.2 所示，曲边梯形 $f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$ 的面积为

$$A=\int_{a}^{b}[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x .$$

如图 6.3 所示，曲边梯形 $g_1(y)\leqslant x\leqslant g_2(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$ 面积为

$$A=\int_{c}^{d}[g_2(y)-g_1(y)]\mathrm{d}y .$$

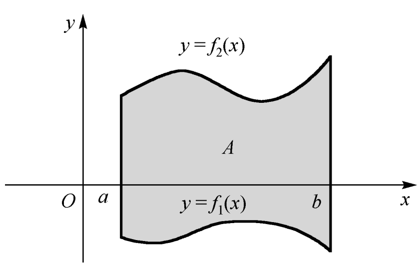


图 6.2　曲边梯形面积

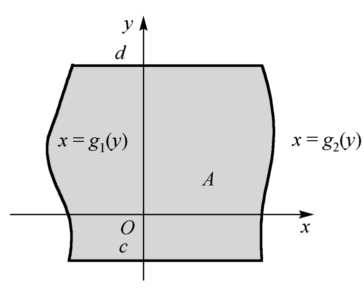


图 6.3　曲边梯形面积

如图 6.4 所示，曲边扇形 $0\leqslant r\leqslant r(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 的面积为 $A=\dfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[r(\theta)]^2\mathrm{d}\theta$.

2．平行截面面积已知的立体的体积

如图 6.5 所示，设一立体位于过$[a, b]$的端点且垂直于x轴的两个平面之间，$A(x)$表示过点x且垂直于x轴的截面面积，则该立体的体积为

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x .$$

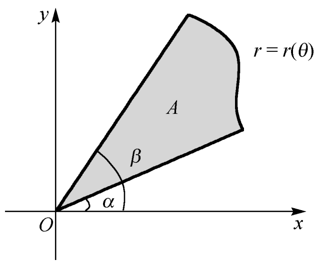


图 6.4　曲边扇形面积

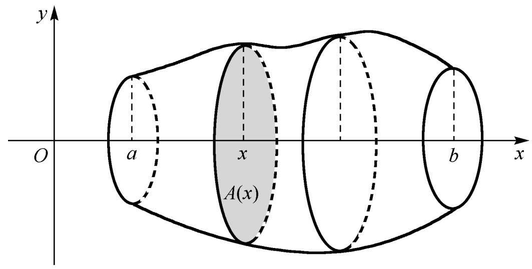


图 6.5　截面面积

3．旋转体的体积

如图 6.6 所示，由平面图形$0 \leqslant y \leqslant f(x)$，$a \leqslant x \leqslant b$绕$x$轴旋转形成的旋转体的体积为

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x .$$

如图 6.7 所示，由平面图形$0 \leqslant x \leqslant g(y)$，$c \leqslant y \leqslant d$绕$y$轴旋转形成的旋转体的体积为

$$V = \pi\int_c^d g^2(y)\mathrm{d}y .$$

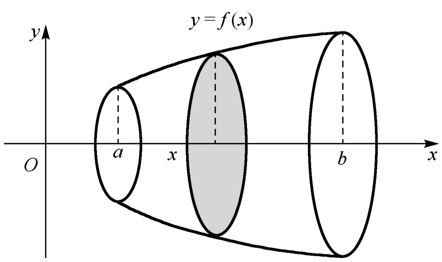


图 6.6　旋转体体积

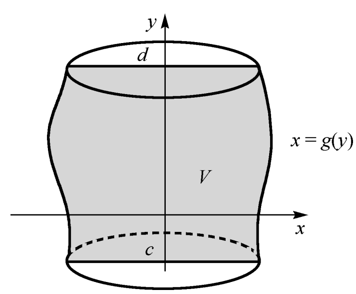


图 6.7　旋转体体积

6.1.8　定积分的经济应用

（1）设某产品的总产量Q是时间t的函数，即$Q = Q(t)$，且总产量的变化率$Q'(t)$连续，则t时刻的总产量为

$$Q(t) = Q(t_0) + \int_{t_0}^{t} Q'(x)\mathrm{d}x .$$

（2）已知边际成本函数$C'(Q)$连续，其中Q为产量，则成本函数为

$$C(Q) = C(0) + \int_0^Q C'(x)\mathrm{d}x .$$

利用类似方法可以利用边际收益函数求总收益，利用边际利润函数求总利润等.

6.1.9　几个重要的结论

（1）设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$；若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

（2）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数，对于任意的实数 a 和正整数 n 有

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x ,$$

$$\int_{0}^{nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x .$$

（3）若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，则有

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x ;$$

$$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x .$$

（4）$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{当}n\text{为偶数时}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{当}n\text{为奇数时}, \end{cases}$$

其中当 n 为偶数时，$n!!$ 表示所有不大于 n 的偶数的连乘积，当 n 为奇数时，$n!!$ 表示所有不大于 n 的奇数的连乘积.

6.2　典型例题分析

6.2.1　题型一：利用几何意义计算定积分

例 6.2.1　利用定积分的几何意义求解下列积分：

（1）$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \ (a>0)$；

（2）$\int_{0}^{2\pi} \sin x \mathrm{d}x$.

解　（1）积分 $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$ 等于由曲线 $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ 与 x 轴围成的半圆的面积，如图 6.8 所示，由于整圆的面积为 πa^2，因此 $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi a^2$.

（2）设 $f(x)=\sin x$，曲线 $f(x)=\sin x$ 与 x 轴在区间 $[0,2\pi]$ 围成的平面图形如图 6.9 所示，根据对称性得，$\int_{0}^{2\pi} \sin x \mathrm{d}x = 0$.

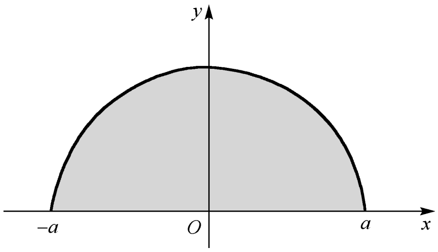


图 6.8 半圆的面积

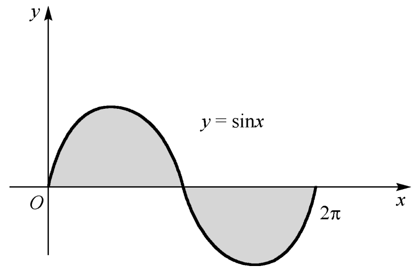


图 6.9 平面的面积

6.2.2 题型二：有关定积分的性质问题

例 6.2.2 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$，则________.

（A）$I_1>I_2>1$ （B）$1>I_1>I_2$ （C）$I_2>I_1>1$ （D）$1>I_2>I_1$

解法 1 因为当 $x>0$ 时，有 $\tan x>x$，于是有 $\frac{\tan x}{x}>1>\frac{x}{\tan x}$，所以，$I_1>I_2$，且 $I_2<\frac{\pi}{4}<1$．排除选项 A、C 以及 D，故选 B.

解法 2 同解法 1，得到 $I_1>I_2$．易求出函数 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，所以在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上函数 $f(x)$ 的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{\pi}$，于是有 $I_1<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4}{\pi}\mathrm{d}x=1$，故选 B.

注：本题解法 1 是利用定积分的保号性比较定积分的大小，解法 2 是结合函数的最值，利用估值定理来求解.

例 6.2.3 【2011（3）】设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$，则 I，J，K 的大小关系是（ ）.

（A）$I<J<K$ （B）$I<K<J$ （C）$J<I<K$ （D）$K<J<I$

解 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$\sin x\leqslant\cos x\leqslant\cot x$，且 $\ln x$ 是增函数，因此有

$$\ln\sin x\leqslant\ln\cos x\leqslant\ln\cot x,$$

且上述不等式中的等号不能恒成立．由定积分的保号性可知

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x<K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x<J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x,$$

故应选 B.

例 6.2.4 已知连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x-2x^2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$ 的表达式.

解 由于定积分是一个常数，因此设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$，则有

$$f(x)=x-2Ax^2,$$

等式两边同时取定积分，得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x-2A\int_0^1 x^2\mathrm{d}x,$$

因此有 $A=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}A$，解得 $A=\frac{3}{10}$，从而 $f(x)=x-\frac{3}{5}x^2$.

例 6.2.5　证明不等式 $\frac{1}{2}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

证　设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$时，由于

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0,$$

且 $f(x)$ 在区间$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上连续，故 $f(x)$ 在区间$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，于是有

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

即

$$\frac{2}{\pi}\leqslant f(x)\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

根据定积分的估值定理，

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

得证

$$\frac{1}{2}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

注：利用定积分的估值定理求解时，关键是能够找到被积函数在积分区间上的最大值和最小值.

6.2.3　题型三：利用定积分的定义求解极限

例 6.2.6　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解　根据定积分的定义

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.\end{aligned}$$

注：连续函数 $f(x)$ 的定积分与数列的极限有着密切联系，如果能把数列通项写成

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$或$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)$的形式，就可以把数列极限问题转化为定积分$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$的计算问题.

例 6.2.7 （2008 年北京市竞赛题）求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n+\frac{n}{n}}\right].$$

解　记

$$x_n=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n+\frac{n}{n}},$$

则有

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n+1}\leqslant x_n<\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n},$$

根据定积分的定义，有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=2\ln 2-1;$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=2\ln 2-1,$$

由夹逼定理可知

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n+\frac{n}{n}}\right]=2\ln 2-1.$$

注：关于n项相加表达式的求极限问题，常用的方法主要有通分，利用夹逼定理，以及利用定积分的定义等三种方法. 通分方法一般使用于分母相同或大致相同的情况. 本题综合运用了夹逼定理和定积分的定义两种方法，具有较高的综合性.

6.2.4 题型四：变限积分问题

例 6.2.8　求导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}x\cos t\,\mathrm{d}t\right)$.

解　$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}x\cos t\,\mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\int_0^{x^2}\cos t\,\mathrm{d}t\right)=\int_0^{x^2}\cos t\,\mathrm{d}t+x\cdot\left(\int_0^{x^2}\cos t\,\mathrm{d}t\right)'$$

$$=\sin x^2+x\cdot(\cos x^2)\cdot 2x=\sin x^2+2x^2(\cos x^2)\,.$$

注：在使用变上限函数求导公式$\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$时，应注意被积函数中不能含自变量$x$. 故本题应把被积函数中的$x$提到积分符号外面来，然后使用乘积的求导公式计算.

例 6.2.9　求由方程$\int_0^y te^t\mathrm{d}t+\int_x^{x^2}(\sqrt{1+t}\cos t)\mathrm{d}t=1$所确定的隐函数$y=f(x)$的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　等式两边同时对x求导数，并将y视为x的函数，得

$$ye^y\cdot y'+2x\sqrt{1+x^2}\cos(x^2)-\sqrt{1+x}\cos x=0\,,$$

因此

$$y'=\frac{\sqrt{1+x}\cos x-2x\sqrt{1+x^2}\cos(x^2)}{ye^y}\,.$$

例 6.2.10　设$f(x)$可导，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}tf(t)\arctan\left(\dfrac{3t}{t^2+2}\right)\mathrm{d}t$.

解　根据积分中值定理，存在一点$\xi\in(x,x+2)$，使得

$$\int_x^{x+2}t\,f(t)\arctan\left(\frac{3t}{t^2+2}\right)\mathrm{d}t=2\xi\,f(\xi)\arctan\left(\frac{3\xi}{\xi^2+2}\right),$$

由夹逼定理可知，当$x\to+\infty$时，$\xi\to+\infty$，且$\dfrac{3\xi}{\xi^2+2}\to 0^+$，因此

$$\text{原极限}=\lim_{\xi\to+\infty}2\xi\,f(\xi)\arctan\left(\frac{3\xi}{\xi^2+2}\right)=\lim_{\xi\to+\infty}2f(\xi)\frac{3\xi^2}{\xi^2+2}=6\times 1=6\,.$$

注：本题是综合利用变限函数的导数和积分中值定理来求解.

例 6.2.11　【2014（3）】求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

解　根据等价无穷小量替换公式，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x}\,.$$

记$f(t)=t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t$，当$t\to+\infty$时，根据泰勒展开，有

$$f(t)=t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t=t^2\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right]-t=\frac{1}{2}+o(1)\,,$$

因此，根据广义积分的几何意义，有

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt=\infty,$$

结合洛必达法则，有

$$原极限=\lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-x\right]=\frac{1}{2}.$$

注：本题在使用洛必达法则时，应该首先验证该题是否适用洛必达法则的条件，即是否属于 $\frac{\infty}{\infty}$ 类型.

例 6.2.12　设函数 $f(x)$ 在实数域 R 内连续，且满足 $\int_0^x tf(x-t)dt=\frac{1}{6}x^3$，试求 $f(x)$.

解　令 $u=x-t$ ，则 $t=x-u$ ， $dt=-du$ ，当 $t=0$ 时， $u=x$ ；当 $t=x$ 时， $u=0$. 因此

$$\int_0^x tf(x-t)dt=-\int_x^0(x-u)f(u)du=\int_0^x(x-u)f(u)du,$$

$$=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du,$$

因此

$$x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=\frac{1}{6}x^3.$$

等式两边同时对 x 求导数，得

$$\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=\frac{1}{2}x^2,$$

从而 $\int_0^x f(u)du=\frac{1}{2}x^2$，故 $f(x)=x$.

注：由于在使用变上限函数求导公式时，被积函数中不能含上限变量 x，而本题被积函数中同时含有变量 x 和积分变量 t，因此需要进行积分变量替换.

例 6.2.13　求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最值.

解　因为 $f(x)$ 是偶函数，故只需求其在 $[0,+\infty)$ 的最值. 令 $f'(x)=0$，即

$$(2-x^2)e^{-x^2}\cdot 2x=0,$$

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一的驻点 $x=\sqrt{2}$. 当 $0<x<\sqrt{2}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\sqrt{2}$ 时，$f'(x)<0$，所以 $x=\sqrt{2}$ 是极大值点，也是最大值点，最大值为

$$f(\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=1+e^{-2}.$$

因为

$$\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}dt=-(2-t)e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=2-1=1,$$

以及 $f(0)=0$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的最小值点，最小值为 $f(0)=0$.

6.2.5　题型五：利用换元法、分部积分法求解定积分

例 6.2.14　计算下列定积分：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{3+\sin^2 x} \mathrm{d}x$；　　（2）【1993（2）】$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} \mathrm{d}x$；

（3）【1994（2）】$\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x$.

解　（1）原式 $= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{3+\sin^2 x} \mathrm{d}(\cos x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2 x}{4-\cos^2 x} \mathrm{d}(\cos x) = -\int_1^0 \frac{1-t^2}{4-t^2} \mathrm{d}t$

$$= \int_0^1 \frac{4-t^2-3}{4-t^2} \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1-\frac{3}{4-t^2}\right) \mathrm{d}t$$

$$= \left(t-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|\right)\Bigg|_0^1 = 1-\frac{3}{4}\ln 3 .$$

（2）原式 $= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \, \mathrm{d}(\tan x) = \frac{1}{2} x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, \mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4} .$$

（3）由于

$$\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^4)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}u ,$$

令 $u=\sin t$，则

$$\text{原式} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2}+2\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 4t\right) \mathrm{d}t = \frac{3}{32}\pi .$$

例 6.2.15　已知 $\int_0^a \mathrm{e}^x \cdot \sqrt{3-2\mathrm{e}^x} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$，求 a 的值.

解　令 $3-2\mathrm{e}^x = t$，则 $-2\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$，因此，

$$\text{原式} = -\frac{1}{2}\int_1^{3-2\mathrm{e}^a} \sqrt{t} \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{3}[\sqrt{(3-2\mathrm{e}^a)^3} - 1] = \frac{1}{3} ,$$

故 $3-2\mathrm{e}^a = 0$，解得 $a = \ln\frac{3}{2}$.

例 6.2.16　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明下列结论：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \mathrm{d}x$；

（2）$\int_0^{\pi} x f(\sin x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x) \mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \mathrm{d}x$.

证　（1）$x = \frac{\pi}{2} - t$，当 $x=0$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$；当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$t=0$．$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$，因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \mathrm{d}x .$$

（2）首先证明

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x\ .$$

令 $x=\pi-t$，当 $x=0$ 时，$t=\pi$；当 $x=\pi$ 时，$t=0$．由 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x &=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t\\ &=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi} tf(\sin t)\mathrm{d}t\ ,\end{aligned}$$

故有

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x\ .$$

下面证明结论 $\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$ 成立．只需证明下式成立即可：

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x\ .$$

根据积分对区间的可加性，有

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x\ .$$

令 $t=\pi-x$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x\ ,$$

从而有

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x\ ,$$

结论得证．

6.2.6　题型六：利用奇偶性、周期性计算定积分

例 6.2.17　求解定积分 $I=\int_0^{2016\pi}\sqrt{1-\cos(2x)}\,\mathrm{d}x$.

解　由于函数 $\sqrt{1-\cos(2x)}$ 的周期为 π，因此

$$I=2016\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos(2x)}\,\mathrm{d}x=2016\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin x\,\mathrm{d}x=4032\sqrt{2}\ .$$

例 6.2.18　求解定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{x^2+\ln(1+x^2)\arctan x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解

$$\text{原式}=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{\ln(1+x^2)\arctan x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&=2\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+0=2\int_0^1\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}\mathrm{d}x\\
&=2\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x=2-2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\\
&=2-2\cdot\frac{\pi}{4}=2-\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

注：函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)\arctan x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 为奇函数，在对称区间上积分为 0；由积分的几何意义知积分 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$.

6.2.7　题型七：分段函数的积分问题

例 6.2.19　求解定积分 $\int_{-1}^3\max\{x,x^2\}\mathrm{d}x$.

解　由于

$$
\max\{x,x^2\}=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & 0<x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 3,\end{cases}
$$

因此

$$
\int_{-1}^3\max\{x,x^2\}\mathrm{d}x=\int_{-1}^0x^2\mathrm{d}x+\int_0^1x\mathrm{d}x+\int_1^3x^2\mathrm{d}x=\frac13+\frac12+\frac83=\frac72 .
$$

例 6.2.20　设 $f(x)=\begin{cases}2x+\dfrac32x^2,-1\leqslant x<0,\\ \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2},0\leqslant x<1,\end{cases}$ 求函数 $F(x)=\int_{-1}^xf(t)\mathrm{d}t$ 的表达式.

解　当 $-1\leqslant x<0$ 时，

$$
F(x)=\int_{-1}^x\left(2t+\frac32t^2\right)\mathrm{d}t=\left(t^2+\frac12t^3\right)\Big|_{-1}^x=\frac12x^3+x^2-\frac12 ;
$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$
\begin{aligned}
F(x)&=\int_{-1}^xf(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0f(t)\mathrm{d}t+\int_0^xf(t)\mathrm{d}t\\
&=\left(t^2+\frac12t^3\right)\Big|_{-1}^0+\int_0^x\frac{te^t}{(e^t+1)^2}\mathrm{d}t=-\frac12-\int_0^xt\mathrm{d}\left(\frac{1}{e^t+1}\right)\\
&=-\frac12-\frac{t}{e^t+1}\Big|_{-1}^0+\int_0^x\frac{1}{e^t+1}\mathrm{d}t=-\frac12-\frac{x}{e^x+1}+\int_0^x\frac{1}{e^t(e^t+1)}\mathrm{d}e^t\\
&=-\frac12-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^t}{e^t+1}\Big|_{-1}^0=-\frac12-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2.
\end{aligned}
$$

所以

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^3+x^2-\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \ln\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{x}{e^x+1}+\ln 2-\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

注：本题考查分段函数变上限定积分表达式的计算方法．注意到 $F(x)$ 的定义域 $[-1,1]$，所以 $[-1,1]$ 之外不需要进行计算．当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$F(x)$ 应为 $\int_{-1}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，直接写成 $F(x)=\int_{-1}^{x}\dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2}\mathrm{d}x$ 是错误的．

6.2.8　题型八：某些不易求出原函数的积分计算问题

例 6.2.21　求解定积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^{\sqrt{3}}}$．

解　积分整理得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^{\sqrt{3}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x)^{\sqrt{3}}}{(\cos x)^{\sqrt{3}}+(\sin x)^{\sqrt{3}}}\mathrm{d}x,$$

令 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，因此

$$\begin{aligned}I&=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(\sin t)^{\sqrt{3}}}{(\sin t)^{\sqrt{3}}+(\cos t)^{\sqrt{3}}}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin t)^{\sqrt{3}}}{(\cos t)^{\sqrt{3}}+(\sin t)^{\sqrt{3}}}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x)^{\sqrt{3}}}{(\cos x)^{\sqrt{3}}+(\sin x)^{\sqrt{3}}}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x)^{\sqrt{3}}+(\sin x)^{\sqrt{3}}}{(\cos x)^{\sqrt{3}}+(\sin x)^{\sqrt{3}}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

从而 $I=\dfrac{\pi}{4}$．

注：对于某些不易求出原函数的定积分问题，通过适当的变量代换，构造并求解方程计算出定积分的值是常用的办法．

例 6.2.22　求解定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^x\sin^4 x}{1+e^x}\mathrm{d}x$．

解　记 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^x\sin^4 x}{1+e^x}\mathrm{d}x$，令 $x=-t$，则

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}\sin^4(-t)}{1+e^{-t}}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 t}{1+e^t}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+e^x}\mathrm{d}x,$$

故

$$2I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^4 x}{1+e^x}dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+e^x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=\frac{3}{8}\pi,$$

因此

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^4 x}{1+e^x}dx=\frac{3}{16}\pi.$$

6.2.9　题型九：定积分相关的证明问题

例 6.2.23　若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上具有二阶连续导数，且 $f(0)=a$， $f(\pi)=b$，证明

$$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin xdx=a+b.$$

证　由于

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx&=\int_0^{\pi}\sin xdf'(x)=\left[f'(x)\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)\cos xdx\\&=-\int_0^{\pi}\cos xd\,f(x)=\left[-f(x)\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f(x)\sin xd\,x\\&=f(\pi)+f(0)-\int_0^{\pi}f(x)\sin xd\,x\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin xdx=a+b.$$

例 6.2.24　【1996（3）】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且满足 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$．证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$．

证　构造辅助函数 $F(x)=xf(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导．由积分中值定理可知，至少存在一点 $x_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=x_0f(x_0),$$

从而有 $F(1)=f(1)=F(x_0)$，故 $F(x)$ 在 $[x_0,1]$ 上满足罗尔定理的条件，由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(x_0,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即有 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$，结论得证．

例 6.2.25　若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，试证明

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx.$$

证　对于任意的实数 λ，$\int_a^b[f(x)-\lambda g(x)]^2dx\geqslant 0$，而

$$\int_a^b[f(x)-\lambda g(x)]^2dx=\lambda^2\int_a^b g^2(x)dx-2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b f^2(x)dx\geqslant 0,$$

上式是关于 λ 的二次三项式，所以判别式

$$\Delta=4\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2-4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

从而

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

注：上述不等式也称为柯西—施瓦兹不等式.

例 6.2.26 【2014（3）】设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 单调递增，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$，证明：

（1）$0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a,\ x\in[a,b]$；

（2）$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

证 （1）当 $x\in[a,b]$ 时，函数 $g(x)$ 在 $[a,x]$ 上使用积分中值定理，则至少存在一点 $\xi\in[a,x]$，使得

$$\int_a^x g(t)\mathrm{d}t=g(\xi)(x-a),$$

又因为 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$，因此 $0\leqslant g(\xi)(x-a)\leqslant x-a$，结论（1）得证.

（2）构造辅助函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t-\int_a^{a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t} f(u)\mathrm{d}u,$$

当 $x\in(a,b)$ 时，

$$F'(x)=f(x)g(x)-f\left(a+\int_a^b g(t)dt\right)g(x)\geqslant f(x)g(x)-f(a+x-a)g(x)=0,$$

所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，因此 $F(b)\geqslant F(a)=0$，结论（2）得证.

6.2.10　题型十：广义积分问题

例 6.2.27　求解广义积分 $\int_0^1\ln\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\text{原式}=-\int_0^1\ln(1-x^2)\mathrm{d}x=-\int_0^1\ln(1-x)(1+x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\ln(1-x)\mathrm{d}x-\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$$

结合定积分的分部积分法，有

$$\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2-\int_0^1\frac{x+1-1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\ln 2-(1-\ln 2)=2\ln 2-1.$$

令 $t=1-x$，则瑕积分

$$\int_0^1 \ln(1-x)\mathrm{d}x = -\int_1^0 \ln t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln t\,\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(t\ln t\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \mathrm{d}t\right)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\varepsilon\ln\varepsilon-(1-\varepsilon)) = -1,$$

所以

$$\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = -2\ln 2+1+1 = 2(1-\ln 2).$$

例 6.2.28 【2013（3）】$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$__________

解　原式$=\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = -\int_1^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}(1+x)^{-1} = -\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln x-\ln(1+x)\right)\Big|_1^{+\infty} = \ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty} = \ln 2.$$

例 6.2.29　讨论广义积分$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$的敛散性，其中$k$为整数.

解　当$k=1$时，$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x) = \lim_{b\to+\infty}[\ln\ln x]_2^b = \infty$.

当$k\neq 1$时，原式$=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{1}{(\ln x)^k}\mathrm{d}(\ln x) = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{1-k}(\ln x)^{1-k}\right]_2^b$

$$=\begin{cases}\frac{1}{k-1}(\ln 2)^{1-k}, & k>1,\\ \infty, & k<1.\end{cases}$$

综上可得，当$k\leqslant 1$时，广义积分$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$发散，当$k>1$时，广义积分收敛.

6.2.11　题型十一：积分的应用问题

例 6.2.30 【2014（3）】设D是由$xy+1=0, y+x=0, y=2$围成的有界区域，则D的面积=________.

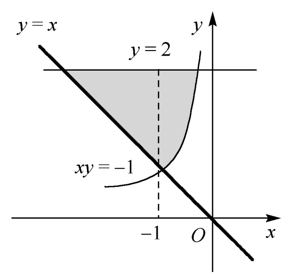


图 6.10　D 的面积

解法 1　如图 6.10 所示，$xy+1=0, y+x=0, y=2$的三个交点坐标分别是$(-2,2),\left(-\frac{1}{2},2\right)(-1,1)$. 区域$D$可以分为一个直角三角形和一个曲边三角形，故面积

$$S=\frac{1}{2}+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left[2-\left(-\frac{1}{x}\right)\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}+(2x+\ln|x|)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}-\ln 2.$$

解法 2　$D=\left\{(x,\ y)\middle|1\leqslant y\leqslant 2, -y\leqslant x\leqslant -\frac{1}{y}\right\}$，则

$$S=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2 \mathrm{d}y\int_{-y}^{-\frac{1}{y}}\mathrm{d}x=\int_1^2\left(-\frac{1}{y}+y\right)\mathrm{d}y=\left(-\ln y+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2 .$$

例 6.2.31 【2010（3）】设位于曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}\ (\mathrm{e}\le x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为________.

解 根据广义积分的几何意义

$$V_x=\pi\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\mathrm{d}x=\pi\arctan(\ln x)\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=\frac{\pi^2}{4} .$$

例 6.2.32 求由曲线 $y=x\mathrm{e}^x$ 和曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 所围成的向左无限延伸的平面图形的面积 S .

解 如图 6.11 所示，根据广义积分的几何意义，

$$S=\int_{-\infty}^{1}(\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to-\infty}\int_b^1(1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\lim_{b\to-\infty}\int_b^1(1-x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$=\lim_{b\to-\infty}\left[(1-x)\mathrm{e}^x\Big|_b^1+\int_b^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right]$$

$$=\lim_{b\to-\infty}[-(1-b)\mathrm{e}^b+\mathrm{e}-\mathrm{e}^b]=\mathrm{e} .$$

例 6.2.33 【2013（3）】设 D 是由 $y=x^{\frac{1}{3}},x=a(a>0)$ 及 x 轴围或的平面图形，V_x 和 V_y 分别是 D 绕 x 轴和 y 轴旋转一周得到的旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值.

解 如图 6.12 所示．根据旋转体体积的计算公式，有

$$V_x=\int_0^a\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\cdot\frac{3}{5}a^{\frac{5}{3}} ,$$

$$V_y=\pi\cdot a^2a^{\frac{1}{3}}-\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\pi(y^3)^2\mathrm{d}y ,$$

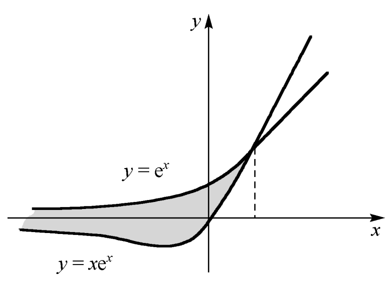


图 6.11　S 的面积

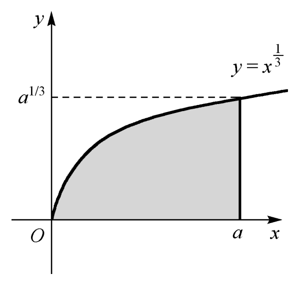


图 6.12　D 的面积

解得 $V_y=\pi\cdot a^2a^{\frac{1}{3}}-\dfrac{1}{7}\pi\cdot a^{\frac{7}{3}}$，由题设 $V_y=10V_x$，可解得 $a=7\sqrt{7}$.

例 6.2.34 设曲线 $y=ax^2(a>0,x\geqslant 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形．问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大？最大体积是多少？

解　如图 6.13 所示，

当 $x \geqslant 0$ 时，由 $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = 1 - x^2 \end{cases}$ 解得 $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$，$y = \dfrac{a}{1+a}$，

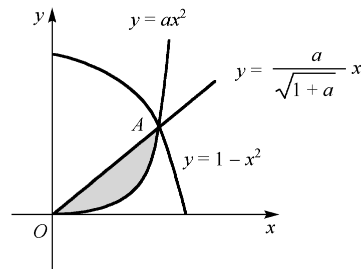


图 6.13　围成的平面图形

故直线 OA 的方程为 $y = \dfrac{ax}{\sqrt{1+a}}$．旋转体的体积为

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} \left(\frac{a^2x^2}{1+a} - a^2x^4 \right) \mathrm{d}x$$

$$= \pi \left[\frac{a^2}{3(1+a)} x^3 - \frac{a^2}{5} x^5 \right] \Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} = \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}}$$

而

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a} = \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{2a(1+a)^{\frac{5}{2}} - a^2 \cdot \frac{5}{2}(1+a)^{\frac{3}{2}}}{(1+a)^5} = \frac{\pi(4a - a^2)}{15(1+a)^{\frac{7}{2}}}, \quad a > 0,$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a} = 0$，并由 $a > 0$ 得唯一驻点 $a = 4$．由题意知旋转体在 $a = 4$ 时取最大值，最大体积为

$$V = \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{16}{5^{\frac{5}{2}}} = \frac{32\sqrt{5}}{1875}\pi .$$

注：本题考查旋转体的体积公式及求最大值问题,旋转体的体积依赖于两抛物线交点位置，而交点位置由参数 a 确定，所以首先要求出两抛物线的交点坐标（参数 a 的函数），再给出直线 OA 的方程以及旋转体的体积（均为参数 a 的函数），最后求出最大值.

例 6.2.35　已知某产品的边际收益为 $R'(Q) = 10 - 2Q - Q^2$，其中 Q 为产量，试求该产品的总收益和平均收益.

解　总收益函数为

$$R(Q) = \int_0^Q R'(Q)\mathrm{d}Q = \int_0^Q (10 - 2Q - Q^2)\mathrm{d}Q = 10Q - Q^2 - \frac{1}{3}Q^3 .$$

平均收益为

$$\overline{R}(Q) = \frac{R(Q)}{Q} = 10 - Q - \frac{1}{3}Q^2 .$$

6.3　深 化 训 练

6.3.1　填空题

（1）极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \ln(1+t)\mathrm{d}t}{1 - \mathrm{e}^{x^3}} =$ ________.

（2）【2015（3）】设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x) = \int_0^{x^2} x f(t)\mathrm{d}t$．若 $\varphi(1) = 1$，$\varphi'(1) = 5$，$f(1) =$ ______.

（3）设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin t^2\mathrm{d}t$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$________.

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x=$________.

（5）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^1\sin x\mathrm{d}x=$________.

（6）【2008（3）】设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$，则 $\int_2^{2\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x$________.

（7）已知 $f(0)=a$，$f(1)=b$，$f'(1)=c$ 则 $\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=$________.

（8）设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上有定义，则 $\int_{-2}^2[f(x)+f(-x)]\sin x\mathrm{d}x=$________.

（9）广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=$________.

（10）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{n(x+1)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=$________.

（11）求位于曲线 $y=x\mathrm{e}^{-x}(0\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界图形的面积为________.

（12）【2011（3）】曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为________.

6.3.2　单项选择题

（1）【2005（1）】设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，则必有（　　）.

（A）$F(x)$ 是偶函数的充要条件是 $f(x)$ 为奇函数

（B）$F(x)$ 是奇函数的充要条件是 $f(x)$ 为偶函数

（C）$F(x)$ 是周期函数的充要条件是 $f(x)$ 为周期函数

（D）$F(x)$ 是单调函数的充要条件是 $f(x)$ 为单调函数

（2）【2008（3）】设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的（　　）.

（A）跳跃间断点　　（B）可去间断点

（C）无穷间断点　　（D）震荡间断点

（3）【2008（3）】如图 6.14 所示，曲线段的方程为 $y=f(x)$，函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有连续的导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于（　　）.

（A）曲边梯形 ABOD 的面积

（B）梯形 ABOD 的面积

（C）曲边三角形 ACD 的面积

（D）三角形 ACD 的面积

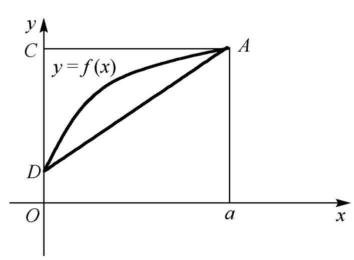


图 6.14　曲线段方程图形

（4）【2009（3）】使不等式 $\int_1^x\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$ 成立的 x 的范围是（　　）.

（A）$(0,1)$　　（B）$\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$　　（C）$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$　　（D）$(\pi,+\infty)$

6.3.3　比较 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan x\mathrm{d}x$ 以及 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan(\sin x)\mathrm{d}x$ 的大小关系.

6.3.4　求解下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{1-\sqrt{1-x^3}}$　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left(3\sin t+t^2\cos\dfrac{1}{t}\right)\mathrm{d}t}{(1+\cos x)\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}t}$

（3）【2005（2）】设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$

（4）【2002（3）】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$

6.3.5　求解下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}\prod\limits_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n-1}}{n}+\dfrac{\sqrt{2n-1}}{2n}+\ldots+\dfrac{\sqrt{n\cdot n-1}}{n\cdot n}\right)$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right)$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$

6.3.6　求下列函数的导数（其中 $f(x)$ 为连续函数）：

（1）$y=\int_{\sin x}^{x}t^2f(t)\,\mathrm{d}t$　　（2）$y=\int_0^x x^2f(t)\,\mathrm{d}t$　　（3）$y=\int_0^x(x-t)^2f(t)\,\mathrm{d}t$

6.3.7　计算下列积分：

（1）$\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$　　（2）$\int_0^1\dfrac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$

（3）$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$　　（4）【2008（2）】$\int_0^1\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

（5）【2015（1）】$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x$　　（6）$\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x$

6.3.8　计算下列广义积分：

（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$　　（2）$\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$

（3）$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}}$　　　　　　　　　（4）$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$

（5）$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$　　　　　　　　　（6）$\int_0^1\frac{x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

6.3.9　确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c（c\neq 0）$.

6.3.10　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot\int_0^x \arcsin t\,\mathrm{d}t}$.

6.3.11　当 $x>0$ 时,证明：$\int_x^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

6.3.12　设 $y=f(x)$ 是由方程 $\int_1^y\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\int_x^{x^2}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t=0$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

6.3.13　设函数 $f(x)=\int_0^x t\mathrm{e}^{-t}\ln(2+t^2)\mathrm{d}t$ 的极值.

6.3.14　设函数 $f(x)=\int_0^x\frac{t+2}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t$ 在区间 $[0,1]$ 上的最值.

6.3.15　（1）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$;

（2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且严格单增，证明：$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

6.3.16　在第一象限内，求曲线 $y=-x^2+1$ 上的一点,使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴围成的图形面积为最小，并求此最小面积.

6.3.17　过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D .

（1）求 D 的面积 A ;

（2）求 D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .

6.3.18　已知生产某产品的固定成本为 6 万元，边际收益和边际成本分别为（单位：万/百台）：

$$R'(Q)=33-8Q,C'(Q)=3Q^2-18Q+36,$$

（1）求生产 Q 个产品的总成本函数；

（2）产量由 1 百台增加到 4 百台时，总收益和总成本各增加了多少？

6.4　深化训练详解

6.3.1　填空题

（1）0；**提示**　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)\cdot 2x}{-3x^2\mathrm{e}^{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot 2x}{-3x^2\mathrm{e}^{x^3}}=0$.

（2）2；**提示**　由于 $\varphi(x)=x\cdot\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t$，因此

$$\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t+2x^2\cdot f(x^2)\,.$$

从而

$$\varphi(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=1\,,\quad \varphi'(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+2f(1)=5\,,$$

解得 $f(1)=2$.

（3）-1；**提示**　显然，当 $x=0$ 时，$y=0$．方程 $\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=x\cdot\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t$ 两边同时对 x 求导数得

$$\mathrm{e}^{-(x+y)^2}\cdot(1+y')=\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t+x\cdot\sin x^2\,,$$

将 $x=0$，$y=0$ 代入上式得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-1$.

（4）0；**提示**　由于当 $x\in[0,1]$ 时，$0\leqslant\dfrac{x^n}{1+x^2}\leqslant x^n$，因此

$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\,,$$

由夹逼定理可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$.

（5）0；**提示**　$\int_0^1\sin x\mathrm{d}x$ 为常数，故其导数为 0.

（6）$\dfrac{1}{2}\ln 3$；**提示**　由于

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+x^3}{1+x^4}=\frac{x+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}+x^2}=\frac{x+\dfrac{1}{x}}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2}\,,$$

因此 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2}$，从而

$$\int_2^{2\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_2^{2\sqrt{2}}\frac{x}{x^2-2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_2^{2\sqrt{2}}\frac{1}{x^2-2}\mathrm{d}(x^2-2)=\frac{1}{2}\ln 3\,.$$

（7）$c-b+a$；**提示**

$$\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=xf'(x)\big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=f'(1)-f(1)+f(0)=c-b+a\,.$$

（8）0；**提示**　$[f(x)+f(-x)]\sin x$ 为奇函数，故其在对称区间 $[-2,2]$ 上的积分为 0.

（9）2；**提示**　$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-2\mathrm{e}^{-x}\big|_0^{+\infty}=2$.

（10）$\dfrac{\pi}{2}$；**提示**

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1\frac{n}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\arctan n+\frac{1}{2n}\ln(1+n^2)\right]=\frac{\pi}{2}.$$

（11）1；**提示**　$S=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-(x+1)\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$.

（12）$\frac{4\pi}{3}$；**提示**　$V_x=\pi\int_1^2 f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_1^2(x^2-1)\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{3}$.

6.3.2　单项选择题

（1）A；**提示**　若 $F(x)$ 是偶函数，则其导函数 $f(x)$ 为奇函数．反之，若 $f(x)$ 为奇函数，设 $G(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$G(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=G(x),$$

从而 $G(x)$ 为偶函数，$f(x)$ 的任意一个原函数 $F(x)$ 都可以表示为 $F(x)=G(x)+C$，从而 $F(-x)=G(-x)+C=G(x)+C=F(x)$，故 $F(x)$ 是偶函数，因此选项 A 正确.

若 $F(x)$ 是奇函数，则其导函数 $f(x)$ 为偶函数．反之，若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 不一定为奇函数，例如取 $f(x)=\cos x$，$F(x)=\sin x+1$，显然 $f(x)$ 为偶函数，但 $F(x)$ 不是奇函数，选项 B 错误.

若取 $f(x)=\cos x$，$F(x)=\sin x+1$，显然 $f(x)$ 为周期函数，但 $F(x)$ 不是周期函数. 选项 C 错误.

若取 $f(x)=x$，$F(x)=\frac{1}{2}x^2$，则知选项 D 错误.

（2）B；**提示**

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1}=f(0),$$

因此 $x=0$ 是函数 $g(x)$ 的可去间断点.

（3）C；**提示**　由于

$$\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^a x\mathrm{d}f(x)=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=af(a)-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

（4）A；**提示**　原问题可转化为求

$$f(x)=\int_1^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\ln x=\int_1^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\int_1^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{\sin t-1}{t}\mathrm{d}t=\int_x^1\frac{1-\sin t}{t}\mathrm{d}t>0$$

成立时 x 的取值范围，当 $t\in(0,1)$ 时，$\frac{1-\sin t}{t}>0$，从而当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>0$，因此选项 A 正确，类似方法可以证明选项 B、C、D 错误.

6.3.3　当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $\sin x<x<\tan x$，因此有

$$\sin(\sin x)<\tan(\sin x)<\tan x.$$

故有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan(\sin x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan x\mathrm{d}x.$$

6.3.4 （1）结合等价无穷小量替换公式和洛必达法则，有

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)\cdot\cos x}{\frac{3}{2}x^2}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cdot\cos x}{x^2}=\frac{2}{3}.$$

（2）$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(3\sin t+t^2\cos\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t}{\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\sin x}{x}+x\cdot\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2}.$$

（3）整理得

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t},$$

令 $u=x-t$，则 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，因此

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{-x\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}=\lim_{\substack{x\to 0\\(\xi\to 0)}}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}$$

$$=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

（4）$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{\frac{1}{2}x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t}{\frac{3}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(1+x^2)\cdot 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\arctan(1+x^2)}{3}=\frac{\pi}{6}.$$

6.3.5 （1）令 $I_n=\dfrac{1}{n^4}\prod_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}$，则

$$\ln I_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln(n^2+i^2)-\ln n^4=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\left\{\ln\left[1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right]+2\ln n\right\}-4\ln n$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\ln\left[1+\left(\frac{i}{n}\right)^2\right],$$

将区间 $[0,2]$ 进行 $2n$ 等分，每个小区间的长度均为 $\frac{1}{n}$，在第 i（$i=1,2,\cdots,2n$）取点 $\xi_i=\frac{i}{n}$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\ln I_n=\int_0^2\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$$

$$=x\ln(1+x^2)\Big|_0^2-\int_0^2\frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\ln5-2\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=2\ln5-4+2\arctan2,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}I_n=25\mathrm{e}^{2\arctan2-4}.$$

（2）记 $A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{nk-1}}{nk}$，由于

$$\frac{\sqrt{nk-1}}{nk}<\frac{1}{\sqrt{nk}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}},\quad \frac{\sqrt{nk-1}}{nk}>\frac{\sqrt{nk-k}}{nk}=\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}},$$

故有

$$\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}<A_n<\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

由夹逼定理可知

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2.$$

（3）将区间 $[0,\pi]$ 进行 n 等分，每个小区间的长度均为 $\frac{\pi}{n}$，在第 i（$i=1,2,\cdots,n$）取点 $\xi_i=\frac{i}{n}\pi$，则有

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i}{n}\pi}=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i}{n}\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sqrt{1+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^\pi=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

（4）记 $A_n=\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}$，由于

$$A_n<\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n},$$

$$A_n>\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

因此由夹逼准则知原式$=\dfrac{2}{\pi}$.

6.3.6　（1）$y'=x^2f(x)-\cos x\sin^2 x f(\sin x)$.

（2）由于 $y=x^2\cdot\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，因此 $y'=2x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+x^2f(x)$.

（3）由于

$$y=\int_0^x(x^2-2xt+t^2)f(t)\,\mathrm{d}t=x^2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-2x\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x t^2f(t)\,\mathrm{d}t,$$

因此

$$y'=2x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t-2x^2f(x)+x^2f(x).$$

6.3.7　（1）被积函数 $\dfrac{x^2\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$ 在积分区域上是奇函数，故积分为 0.

（2）原式$=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)=-\int_0^1 x\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)^{-1}$

$$=-\left[x(1+\mathrm{e}^x)^{-1}\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\mathrm{e}}+1-\ln(1+\mathrm{e})+\ln 2.$$

（3）由于

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x,$$

故令 $t=x-1$ 得

$$原式=\int_{-1}^1(t+1)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t+\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

因为 $t\sqrt{1-t^2}$ 是奇函数且 $\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ 积分区间为对称区间，所以有 $\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=0$，又因为 $\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ 是半径为 1 的单位圆上半部分的面积，所以有

$$原式=\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t+\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

（4）令 $x=\sin t$，则

$$\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \arcsin x \mathrm{d}(\arcsin x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}t^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\mathrm{d}(\sin 2t) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}t\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}.$$

（5）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|x|\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}.$

（6）记 $I_n = \int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x$，则

$$I_n = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x,$$

令 $t=\frac{\pi}{2}-x$，则 $x=\frac{\pi}{2}-t$，　$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，从而

$$I_n = -\pi\int_{\pi/2}^{0}\frac{\cos^{2n}t}{\cos^{2n}t+\sin^{2n}t}\mathrm{d}t = \pi\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{2n}x}{\cos^{2n}x+\sin^{2n}x}\mathrm{d}x.$$

于是 $2I_n = \pi\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}$，故 $I_n = \frac{\pi^2}{4}$.

6.3.8 （1）由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2+4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(x+1)^2+4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{4},$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

（2）根据定义

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)},$$

而

$$\int_1^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \int_1^{b}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \ln x\Big|_1^b - \int_1^b\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{2(x^2+1)} = \ln\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{2}\ln 2,$$

因此

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \frac{1}{2}\ln 2 + \lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b}{\sqrt{b^2+1}} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

（3）令 $t=\sqrt{x-2}$，则

$$\text{原式}=\int^{+\infty}\frac{2}{t^2+9}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{3}.$$

（4）
$$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}\left(\frac{-1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)$$
$$=-\frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x.$$

令 $\mathrm{e}^x=t$，则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，于是

$$\text{原式}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(1+t)}\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\frac{t}{1+t}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2.$$

（5）
$$\text{原式}=-\int_1^{+\infty}\arctan x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x.$$
$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln b-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)+\frac{1}{2}\ln 2\right]$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2+\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

（6）
$$\int_0^1\frac{x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{b\to1^-}\int_0^b\frac{x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$\overset{x=\sin t}{=\!=\!=}\lim_{b\to1^-}\int_0^{\arcsin b}\frac{\sin t\cos t}{(2-\sin^2 t)\cos t}\mathrm{d}t$$
$$=-\lim_{b\to1^-}\int_0^{\arcsin b}\frac{1}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}(\cos t)=-\lim_{b\to1^-}\arctan(\cos t)\Big|_0^{\arcsin b}$$
$$=-\lim_{b\to1^-}\left[\arctan[\cos(\arcsin b)]-\arctan(\cos 0)\right]=\frac{\pi}{4}.$$

6.3.9　由于 $x\to0$ 时，$ax-\sin x\to0$，且极限 c 不为零，所以当 $x\to0$ 时，必有

$$\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t\to0,$$

因此 $b=0$．由于

$$\lim_{x\to0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{x(a-\cos x)}{\ln(1+x^3)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(a-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{a-\cos x}{x^2}=c(c\neq0),$$

故必有 $a=1$，从而 $c=\frac{1}{2}$．

6.3.10　由于

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\arcsin t\,\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{2x}=\frac{1}{2},$$

所以当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x \arcsin t\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{2}x^2, \sqrt{1+x^2}-1\sim\frac{1}{2}x^2$．结合用等价无穷小量替换和洛必达法则，有

$$\text{原极限}=4\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{x^4}=4\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^3 x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3\cos x}{x^3}=2\,.$$

6.3.11　令 $t=\frac{1}{u}$，则

$$\text{左端}=\int_x^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\text{右端}.$$

6.3.12　方程 $\int_1^y\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\int_x^{x^2}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t=0$ 两边同时对 x 求导数，得

$$\frac{\sin y}{y}\cdot y'+2x\ln(1+x^2)-\ln(1+x)=0\,,$$

因此

$$y'=\frac{y\ln(1+x)-2xy\ln(1+x^2)}{\sin y}\,.$$

6.3.13　由于 $f'(x)=x\mathrm{e}^{-x}\ln(2+x^2)$，令 $f'(x)=0$，得到唯一驻点 $x=0$．又因为当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，因此 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点，极小值为 $f(0)=0$．

6.3.14　当 $x\in(0,1)$ 时，由于 $f'(x)=\frac{x+2}{x^2+2x+x}>0$，因此 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，因此函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $f(0)=0$，最大值为 $f(1)=\int_0^1\frac{t+2}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t$．

而

$$\int_0^1\frac{t+2}{t^2+2t+2}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t+2}{(t+1)^2+1}\mathrm{d}t=\int_1^2\frac{u+1}{u^2+1}\mathrm{d}u=\int_1^2\frac{u}{u^2+1}\mathrm{d}u+\int_1^2\frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\ln(u^2+1)\Big|_1^2+\arctan u\Big|_1^2=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}+\arctan 2-\frac{\pi}{4}\,.$$

因此函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为

$$f(1)=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}+\arctan 2-\frac{\pi}{4}\,.$$

6.3.15　（1）令 $F(x)=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-(x-a)\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t$.因为

$$F'(x)=2\int_a^x f(t)\mathrm{d}x\cdot f(x)-\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t-(x-a)f^2(x)$$

$$=\int_a^x 2f(x)f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f^2(x)\mathrm{d}t$$

$$=-\int_a^x [f(t)-f(x)]^2 \mathrm{d}t \leqslant 0,$$

所以 $F(x)$ 单调递减, $x\in[a,b]$,又 $F(a)=0$,则 $F(b)\leqslant F(a)=0$ ，故

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x .$$

（2）作辅助函数 $F(x)=(a+x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t$ ，因为

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+(a+x)f(x)-2xf(x)\\&=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+(a-x)f(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(x)\mathrm{d}t\\&=\int_a^x [f(t)-f(x)]\mathrm{d}t<0,\end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 单调递减,又 $F(a)=0$ ，由此可知则 $F(b)<F(a)=0$ ，即

$$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x .$$

6.3.16　如图 6.15 所示，设所求点 $P(x,y)$ ，因为 $y'=-2x$ $(x>0)$ ，故过点 $P(x,y)$ 的切线方程为：

$$Y-y=-2x(X-x) .$$

当 $X=0$ 时，得切线在 y 轴上的截面距为 $b=x^2+1$ ；当 $Y=0$ 时，得切线在 x 轴上的截距为 $a=\dfrac{x^2+1}{2x}$. 故所求面积为：

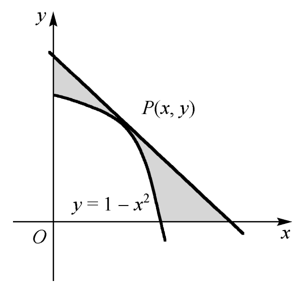


图 6.15　过 $P(x,y)$的切线方程

$$S(x)=\frac{1}{2}ab-\int_0^1(-x^2+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(x^3+2x+\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{3},$$

由于

$$S'(x)=\frac{1}{4}\left(3x-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right),$$

令 $S'(x)=0$ ，解得唯一驻点 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ，再由 $S''\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)>0$ 知， $S(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 处取得极小值，且当 $0<x<1$ 时，仅有此一个极小值点，故此极小值点即为 $S(x)$ 在 $0<x<1$ 上的最小值．当 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 时，$y=\dfrac{2}{3}$，且 $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{9}(2\sqrt{3}-3)$. 故所求点为 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{3}\right)$，所求最小面积为 $\dfrac{2}{9}(2\sqrt{3}-3)$.

6.3.17　（1）设切点的横坐标为 x_0，则曲线 $y=\ln x$ 在点 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程是

$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0),$$

由该切线过原点知 $\ln x_0-1=0$ ，从而 $x_0=\mathrm{e}$ ，所以该切线的方程为 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$. 平面图形 D 的面积为

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}-1 .$$

（2）切线 $y=\frac{1}{e}x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 所围成的三角形绕直线 $x=e$ 旋转所得的圆锥体体积为

$$V_1=\frac{1}{3}\pi e^2 .$$

曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 所围成的图形绕直线 $x=e$ 旋转所得的旋转体体积为

$$V_2=\int_0^1 \pi(e-e^y)^2 dy .$$

因此所求旋转体体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{1}{3}\pi e^2-\int_0^1 \pi(e-e^y)^2 dy=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3) .$$

6.3.18 （1）由题意

$$C(Q)=\int_0^Q C'(x)dx+C_0=\int_0^Q (3x^2-18x+36)dx+6=Q^3-9Q^2+3Q+6 ;$$

（2）产量由 1 百台增加到 4 百台时，总收益和总成本的改变量为：

$$R(4)-R(1)=\int_1^4 R'(Q)dQ=\int_1^4 (33-8Q)dQ=39 \text{（万元）};$$

$$C(4)-C(1)=\int_1^4 C'(Q)dQ=\int_1^4 (3Q^2-18Q+36)dQ=36 \text{（万元）}.$$

6.5　综合提高训练

例 6.5.1　【2012（1）】设 $I_k=\int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x dx\ (k=1,2,3)$，则有（　　）.

（A）$I_1<I_2<I_3$　　（B）$I_3<I_2<I_1$

（C）$I_2<I_3<I_1$　　（D）$I_2<I_1<I_3$

解　由题意有

$$I_1=\int_0^{\pi} e^{x^2}\sin x dx ,\quad I_2=\int_0^{2\pi} e^{x^2}\sin x dx ,\quad I_3=\int_0^{3\pi} e^{x^2}\sin x dx .$$

接下来采用比差法两两比较，由于在 $(\pi, 2\pi)$ 上 $\sin x<0$，因此

$$I_2-I_1=\int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin x dx<0 ,$$

故有 $I_2<I_1$；又因为在 $(2\pi, 3\pi)$ 上 $\sin x>0$，因此

$$I_3-I_2=\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x dx>0 ,$$

故有 $I_3>I_2$；又因为

$$\begin{aligned}I_3-I_1&=\int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x dx=\int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin x dx+\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x dx\\&=\int_{2\pi}^{3\pi} e^{(t-\pi)^2}\sin(t-\pi)dt+\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin x dx=\int_{2\pi}^{3\pi}[e^{x^2}-e^{(x-\pi)^2}]\sin x dx>0 ,\end{aligned}$$

故有 $I_3 > I_1$；综上可得，$I_2 < I_1 < I_3$，故应选 D.

例 6.5.2　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，且 $f(x)=x$，$x\in[0,\pi)$，计算 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

解法 1
$$\int_{\pi}^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\pi}^{3\pi}[f(x-\pi)+\sin x]\mathrm{d}x$$
$$=\int_{\pi}^{3\pi} f(x-\pi)\mathrm{d}x \xlongequal{t=x-\pi} \int_{0}^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t+\int_{\pi}^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_{0}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t+\int_{\pi}^{2\pi}[f(t-\pi)+\sin x]\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{2}-2+\int_{\pi}^{2\pi} f(t-\pi)\mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{u=t-\pi}\frac{\pi^2}{2}-2+\int_{0}^{\pi} f(u)\mathrm{d}u=\pi^2-2.$$

解法 2　当 $x\in[\pi,2\pi)$ 时，$x-\pi\in[0,\pi)$，由 f 在 $[0,\pi)$ 上的定义知 $f(x)=x-\pi$，故
$$f(x)=f(x-\pi)+\sin x=x-\pi+\sin x \qquad x\in[\pi,2\pi)$$
当 $x\in[2\pi,3\pi)$ 时，$x-\pi\in[\pi,2\pi)$，
$$f(x-\pi)=[(x-\pi)-\pi]+\sin(x-\pi)=x-2\pi+\sin x,$$
故
$$f(x)=f(x-\pi)+\sin x=x-2\pi-\sin x+\sin x=x-2\pi.$$
综上所述，当 $x\in[\pi,3\pi)$ 时，
$$f(x)=\begin{cases}x-\pi+\sin x, & x\in[\pi,2\pi),\\ x-2\pi, & x\in[2\pi,3\pi),\end{cases}$$
故
$$\int_{\pi}^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\pi}^{2\pi}(x-\pi+\sin x)\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}(x-2\pi)\mathrm{d}x=\pi^2-2.$$

注：解法 1 是直接将 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$ 代入被积函数，利用定积分的换元法做变量代换，直到化为仅与 $[0,\pi)$ 上定义的 $f(x)$ 有关的积分；解法 2 是根据 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$ 和 $f(x)$ 在 $[0,\pi)$ 上的定义，直接求解出 $f(x)$ 在 $[\pi,3\pi]$ 上的表达式，从而将问题转化为一个求分段函数的定积分问题.

例 6.5.3　设 $f'(x)$ 连续，$F(x)=\int_0^x f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$，求证
$$F(2a)-2F(a)=[f(a)]^2-f(0)\cdot f(2a).$$

证　根据积分的性质，有
$$F(2a)-2F(a)=\int_0^{2a} f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t-2\int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t+\int_a^{2a} f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t-2\int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^{2a} f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t-\int_0^a f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t,$$

令 $2a-t=y$，则

$$\begin{aligned}\int_a^{2a} f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t &= -\int_a^0 f(2a-y)f'(y)\mathrm{d}y \\ &= -f(y)f(2a-y)\Big|_a^0 - \int_a^0 f'(2a-y)f(y)\mathrm{d}y \\ &= -f(0)f(2a)+f(a)f(a)+\int_0^a f'(2a-t)f(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}F(2a)-2F(a) &= [f^2(a)]-f(0)f(2a)+\int_0^a f'(2a-t)f(t)\mathrm{d}t-\int_0^a f'(2a-t)f(t)\mathrm{d}t \\ &= [f^2(a)]-f(0)f(2a).\end{aligned}$$

例 6.5.4　求定积分 $I_n=\int_0^1 x^m(\ln x)^n\mathrm{d}x$（其中 m,n 为正整数）.

解

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{1}{m+1}\int_0^1(\ln x)^n\mathrm{d}x^{m+1} = -\frac{n}{m+1}\int_0^1\frac{x^{m+1}(\ln x)^{n-1}}{x}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x = -\frac{n}{m+1}I_{n-1},\end{aligned}$$

所以

$$I_n=(-1)\frac{n}{m+1}I_{n-1}=\cdots=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n}\int_0^1 x^m\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

例 6.5.5　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}4x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$，求常数 a 的值.

解　左端 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2a}{x+a}\right)^x=\mathrm{e}^{-2a}$；

$$\begin{aligned}\text{右端} &= -2\int_a^{+\infty}x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2x} = -2x^2\mathrm{e}^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+4\int_a^{+\infty}x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = 2a^2\mathrm{e}^{-2a}-2\int_a^{+\infty}x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2x} \\ &= 2a^2\mathrm{e}^{-2a}-2x\mathrm{e}^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+2\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = 2a^2\mathrm{e}^{-2a}+2a\mathrm{e}^{-2a}-\mathrm{e}^{-2x}\Big|_a^{+\infty} \\ &= 2a^2\mathrm{e}^{-2a}+2a\mathrm{e}^{-2a}+\mathrm{e}^{-2a},\end{aligned}$$

由 $\mathrm{e}^{-2a}=2a^2\mathrm{e}^{-2a}+2a\mathrm{e}^{-2a}+\mathrm{e}^{-2a}$，解得 $a=0$ 或 $a=-1$.

例 6.5.6　【2007（2）】设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}$ $(a>1,\ 0\leqslant x<+\infty)$ 下方、x 轴上方的无界区域.

（1）求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成立旋转体的体积 $V(a)$；

（2）当 a 为何值时，$V(a)$ 最小？并求此最小值.

解　由旋转体体积公式得

$$V(a)=\pi\int_0^{+\infty}y^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{+\infty}xa^{-\frac{x}{a}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi a}{\ln a}\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}(a^{-\frac{x}{a}})=\frac{\pi a}{\ln a}\int_0^{+\infty} a^{-\frac{x}{a}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi a^2}{\ln^2 a}a^{-\frac{x}{a}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi a^2}{\ln^2 a}.$$

（2）对$V(a)$求导，分类讨论

$$V'(a)=\pi\frac{2a\cdot\ln^2 a-a^2\cdot 2\ln a\cdot\frac{1}{a}}{\ln^4 a}=2\pi a\frac{\ln a-1}{\ln^3 a}.$$

令$V'(a)=0$，解得$a=\mathrm{e}$．当$1<a<\mathrm{e}$时，$V'(a)<0$，当$a>\mathrm{e}$时，$V'(a)>0$，所以$a=\mathrm{e}$时，$V(a)$在$a=\mathrm{e}$上取得极小值，也是最小值，最小值为$V(\mathrm{e})=\pi\mathrm{e}^2$．

例 6.5.7 【2005（3）】设$f(x)$，$g(x)$在$[0,1]$上的导数连续，且$f(0)=0$，$f'(x)\geqslant 0$，$g'(x)\geqslant 0$．证明对任何$a\in[0,1]$，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)g(1).$$

证　构造辅助函数

$$F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t-f(x)g(1),$$

则$F(x)$在$[0,1]$上的导数连续，并且

$$F'(x)=g(x)f'(x)-f'(x)g(1)=f'(x)[g(x)-g(1)],$$

由于$x\in[0,1]$时，$g'(x)\geqslant 0$，因此$g(x)$在$[0,1]$上单调递增，故$g(x)-g(1)\geqslant 0$，又因为$f'(x)\geqslant 0$，因此$F'(x)\leqslant 0$，即$F(x)$在$[0,1]$上单调递减．而

$$F(1)=\int_0^1 g(t)f'(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t-f(1)g(1),$$

且

$$\int_0^1 g(t)f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 g(t)\mathrm{d}f(t)=g(t)f(t)\Big|_0^1-\int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

$$=f(1)g(1)-\int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t,$$

从而$F(1)=0$．故当$x\in[0,1]$时，$F(x)\geqslant 0$，因此对于任何$a\in[0,1]$，有$F(a)\geqslant F(1)=0$，即有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)g(1).$$

注：可用参数变易法转化为函数不等式证明.

例 6.5.8 【2008（3）】设$f(x)$是周期为 2 的连续函数，

（1）证明对任意实数t，有$\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$；

（2）证明$G(x)=\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$是周期为 2 的周期函数.

证　（1）利用积分的可加性，有

$$\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x = \int_t^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^{t+2} f(x)\mathrm{d}x ,$$

而

$$\int_2^{t+2} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{u=x-2} \int_0^t f(u+2)\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^t f(u)\mathrm{d}u = -\int_t^0 f(x)\mathrm{d}x,$$

因此

$$\int_t^{t+2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x .$$

（2）记 $\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s = a$，由（1）知，对任意 x 有

$$\int_t^{t+2} f(s)\mathrm{d}s = \int_0^2 f(s)\mathrm{d}s = a ,$$

因此

$$G(x+2) - G(x) = 2\int_0^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - a(x+2) - 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + ax$$

$$= 2\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - 2a = 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t - 2a = 0 ,$$

故 $G(x)$ 是周期为 2 的周期函数.

例 6.5.9 【2010（1，3）】（1）比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t$ （$n=1,2,\cdots$）的大小，说明理由；

（2）记 $u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t$ （$n=1,2,\cdots$），求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

解　（1）当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时，$0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$，故

$$|\ln t|[\ln(1+t)]^n \leqslant |\ln t| t^n ,$$

由定积分的性质可知

$$\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t \quad (n=1,2,\cdots).$$

（2）

$$\int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t = -\int_0^1 t^n \cdot \ln t \mathrm{d}t = -\frac{1}{n+1}\left(t^{n+1} \cdot \ln t \Big|_0^1 - \int_0^1 t^{n+1} \cdot \frac{1}{t} \mathrm{d}t \right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} \cdot t^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2} ,$$

于是有

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} , \quad n=1,2,\cdots ,$$

由夹逼定理得

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0 ,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

第 7 章　多元函数微积分学

7.1　知 识 要 点

7.1.1　二元函数的定义

设 D 是平面上一个点集，如果对于每一个点 $P(x,y)\in D$，按照一定的对应法则 f，总有唯一确定的 z 与之对应，则称 z 是变量 x,y 的二元函数（或点 P 的函数），记为 $z=f(x,y)$，点集 D 称为函数的定义域，也记为 $D(f)$ 或者 D_f，x 与 y 称为自变量，z 称为因变量，数集 $\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D_f\}$ 称为函数的值域，记为 $Z(f)$ 或者 Z_f. 通常二元函数的图形是空间中的一个曲面.

7.1.2　二元函数的极限与连续

1．二元函数的极限

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个去心邻域内有定义，A 为某个确定的常数，如果对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得对于满足不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)$，都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 $P\to P_0$ 时函数 $z=f(x,y)$ 的极限为 A，记为

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A\text{，或}\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A\text{，或}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A.$$

注：二元函数的极限与一元函数的极限有着本质的区别，对于一元函数而言，$x\to x_0$ 无非只有两种情况，即 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，但对于二元函数而言，点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 却有着无穷多种情形（或路径）.

2．二元函数的连续

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个实心邻域内有定义，如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**连续**.

7.1.3　偏导数

函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 x 的偏导数为

$$f_x'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

对 x 的偏导数也可记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\quad z'_x(x_0,y_0),\quad f_x(x_0,y_0).$$

同样，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 y 的偏导数为

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

对 y 的偏导数也可记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y},\quad z'_y(x_0,y_0),\quad f_y(x_0,y_0).$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数还是 x，y 的二元函数，称其为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad z'_x(x,y),\quad f'_x(x,y),\quad f_x(x,y).$$

类似地，可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad z'_y(x,y),\quad f'_y(x,y),\quad f_y(x,y).$$

注：多元函数求偏导问题本质上仍是一元函数的求导问题，因此一元函数的求导公式、法则和技巧均可直接使用．求偏导时，关键是要分清对哪个变量求导，把其他剩余变量暂时当成常数.

7.1.4　全微分

1．全微分的概念

设自变量在点 (x,y) 处有改变量 Δx，Δy，若函数 $z=f(x,y)$ 相应的改变量可以表示为

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\quad \rho\to 0.$$

其中 A、B 可以是 x，y 的函数，但与 Δx，Δy 无关；$o(\rho)$ 是一个比 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 较高阶的无穷小量，则称 $A\Delta x+B\Delta y$ 是函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的**全微分**，记为 $\mathrm{d}z$ 或 $\mathrm{d}f(x,y)$，即

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y.$$

此时也称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处**可微**.

2．可微的充分条件与必要条件

定理 1　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续.

定理 2　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处两个偏导数 $f'_x(x,y)$、$f'_y(x,y)$ 均存在.

定理 3　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 某一邻域内有连续的偏导数 $f'_x(x,y)$、$f'_y(x,y)$，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，并且

$$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y，\text{或 }\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

3．全微分的形式不变性

设 $z=f(u,v)$ 可微，若 u,v 为自变量，则 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\dfrac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$. 若 u,v 为中间变量，例如，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，如果 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 分别都有连续的偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在 (x,y) 处的全微分仍然可以表示为 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\dfrac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$. 即无论 u，v 是自变量还是中间变量，$\mathrm{d}z$ 总可以表示为 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\dfrac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$.

4．极限、连续、偏导数及微分之间的关系

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某个邻域内有定义，则函数的极限、连续、偏导数及微分之间的关系如图 7.1 所示.

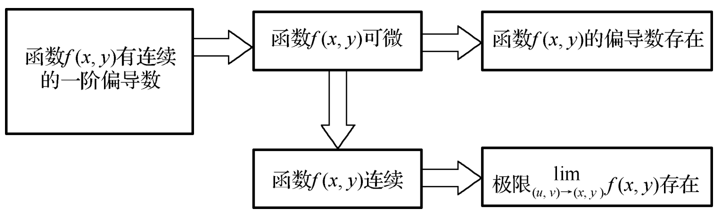


图 7.1　函数 $f(x,y)$ 连续、可微及其偏导数之间的关系

需要注意的是上述关系逆推不一定成立.

7.1.5　高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的偏导函数 $f_x'(x,y)$、$f_y'(x,y)$ 仍然具有偏导数，则它们的偏导数称为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，记为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=z''_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)=z''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)=z''_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)=z''_{yy}(x,y).$$

类似可以定义三阶、四阶以及 n 阶偏导数.

注：若二元函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 都连续，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，即二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关. 该结论可以推广到高阶偏导数的情形，即高阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关.

7.1.6　多元函数的求导法则

1．复合函数求导法则

（1）如果函数 $u=u(x,y)$， $v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 有连续的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处有连续的偏导数，那么复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x,y) 处对 x,y 的偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}f_1'+\frac{\partial v}{\partial x}f_2',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}f_1'+\frac{\partial v}{\partial y}f_2'.$$

（2）如果三元复合函数为 $s=f(u,v,w)$ 有连续的偏导数，而 $u=u(x,y)$， $v=v(x,y)$， $w=w(x,y)$ 也有连续的偏导数，则 $z=f[u(x,y),v(x,y),w(x,y)]$ 在点 (x,y) 处对 x,y 的偏导数存在，且

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}f_1'+\frac{\partial v}{\partial x}f_2'+\frac{\partial w}{\partial x}f_3',$$

$$\frac{\partial s}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}f_1'+\frac{\partial v}{\partial y}f_2'+\frac{\partial w}{\partial y}f_3'.$$

（3）如果 $z=f(u,v)$ 有连续的偏导数，函数 $u=\phi(x)$ 和 $v=\psi(x)$ 可导，则函数 $z=f[\phi(x),\psi(x)]$ 对 x 的导数称为**全导数**，且

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}f_1'+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}f_2'.$$

2．隐函数求导法则

（1）如果二元函数 $F(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 确定一个具有连续导数的隐函数 $y=f(x)$，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F_x'}{F_y'}.$$

（2）如果三元函数 $F(x,y,z)$ 具有连续偏导数，且 $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 确定一个具有连续偏导数的二元隐函数 $z=f(x,y)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F_x'}{F_z'},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F_y'}{F_z'}.$$

7.1.7　二元函数的极值

1．极值存在的必要条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有极值且两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$， $f_y'(x_0,y_0)$ 都存在，则

$$f'_x(x_0,y_0)=0\,,\quad f'_y(x_0,y_0)=0\,.$$

2．极值存在的充分条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有连续的二阶偏导数，且点 (x_0,y_0) 是它的驻点，设 $f''_{xx}(x_0,y_0)=A$， $f''_{xy}(x_0,y_0)=B$， $f''_{yy}(x_0,y_0)=C$，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 是否取得极值的条件如下：

（1）当 $AC-B^2>0$ 时，取得极值，且当 $A>0$ 时， $z=f(x,y)$ 取得极小值； $A<0$ 时，$z=f(x,y)$ 取得极大值.

（2）当 $AC-B^2<0$ 时， $z=f(x,y)$ 没有取得极值.

（3）当 $AC-B^2=0$ 时， $z=f(x,y)$ 可能取得极值，也可能没有取得极值，要用另外的方法判断.

3．条件极值

（1）函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\phi(x,y)=0$ 下的条件极值问题.

首先构造一个拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y)\,,$$

$L(x,y,\lambda)$ 分别对 x、y 及 λ 的一阶偏导数

$$\begin{cases} L'_x=f'_x(x,y)+\lambda\phi'_x(x,y)=0, \\ L'_y=f'_y(x,y)+\lambda\phi'_y(x,y)=0, \\ L'_\lambda=\phi(x,y)=0. \end{cases}$$

由这个方程组解出 x 和 y，则其中点 (x,y) 就可能是函数的极值点．至于如何确定所求的点是否是极值点，在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判断.

（2）函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\phi(x,y,z)=0$， $\psi(x,y,z)=0$ 下的条件极值问题.

首先构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\phi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)\,,$$

求其一阶偏导数，并使其为零，即

$$\begin{cases} L'_x=f'_x(x,y,z)+\lambda\phi'_x(x,y,z)+\mu\psi'_x(x,y,z)=0, \\ L'_y=f'_y(x,y,z)+\lambda\phi'_y(x,y,z)+\mu\psi'_y(x,y,z)=0, \\ L'_z=f'_z(x,y,z)+\lambda\phi'_z(x,y,z)+\mu\psi'_z(x,y,z)=0, \\ L'_\lambda=\phi(x,y,z)=0, \\ L'_\mu=\psi(x,y,z)=0. \end{cases}$$

求解方程组，找到可能的极值点，然后根据实际意义判断这些点是否为极值点.

7.1.8　二重积分的概念与性质

1．二重积分的概念

设函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有定义．将区域 D 任意分成 n 小区域：$\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，…，$\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 表示第 i 个小区域，也表示该小区域的面积，记 d_i 为 $\Delta\sigma_i$ 的直径，在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$，如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，且极限值

与区域 D 的分法及点 (ξ_i,η_i) 的取法无关，则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上是**可积**的，并称此极限为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的**二重积分**，记为 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i ,$$

其中 $f(x,y)$ 称为**被积函数**， $f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 称为**被积表达式**， $\mathrm{d}\sigma$ 称为**面积元素**， x 与 y 称为**积分变量**， D 称为**积分区域**.

2．二重积分的性质

设函数 $f(x,y)$， $g(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积.

（1）设 k 为常数，则 $kf(x,y)$ 在区域 D 上可积，且

$$\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

（2） $f(x,y)\pm g(x,y)$ 在闭区域 D 上可积，且

$$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\pm\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

（3）**积分对区域的可加性**　如果将 D 分成两个区域 D_1 和 D_2，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

（4）若 $f(x,y)=1$， σ 为 D 的面积，则

$$\iint\limits_D 1\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\sigma .$$

这个性质的几何意义是：高为 1 的平顶柱体的体积在数值上恰好等于柱体的底面积.

（5）若在区域 D 上有 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

（6） $|f(x,y)|$ 在区域 D 上可积，且

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma .$$

（7）**估值定理**　若在区域 D 上有 $M\leqslant f(x,y)\leqslant M$，这里 M、m 分别表示为 $f(x,y)$ 在区域 D 上最大值和最小值， σ 为 D 的面积，则

$$m\sigma\leqslant\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant M\sigma .$$

（8）**积分中值定理**　设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续， σ 为 D 的面积，则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\sigma .$$

7.1.9　利用直角坐标系计算二重积分

1．*X*-型区域

设 $f(x,y)$ 的积分区域为 $D=\{(x,y)\mid\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$，如图 7.2 所示，其中函数 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，此类区域称为 X -型区域，X -型区域的特点是穿过 D 内部且平行于 Y 轴的直线与 D 的边界相交不多于两点．此时

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\,.$$

2．*Y*-型区域

如果积分区域为 $D=\{(x,y)\mid\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y),c\leqslant y\leqslant d\}$，如图 7.3 所示．其中函数 $\psi_1(y)$、$\psi_2(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上连续，此区域我们称为 Y -型区域，Y -型区域的特点是穿过 D 内部且平行于 X 轴的直线与 D 的边界相交不多于两点．此时

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x\,.$$

注：计算二重积分时，选择 *X*-型区域，还是选择 *Y*-型区域进行积分，取决于被积函数和积分区域. 选取的原则首先是可积，其次是积分过程简单.

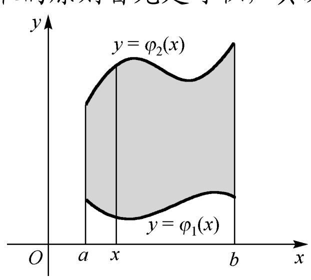


图 7.2　积分区域

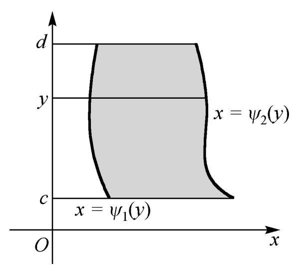


图 7.3　积分区域

7.1.10　利用极坐标计算二重积分

（1）极点 O 在区域 D 外的情形. 设在极坐标系下区域 D 的边界曲线为 $r=r_1(\theta)$ 和 $r=r_2(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，其中 $r_1(\theta)$ 和 $r_2(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续．如图 7.4 所示，区域 D 可以表示为

$$D=\{(r,\theta)\mid r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}\,.$$

于是

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\,.$$

（2）极点 O 在区域 D 的边界上的情形．如图 7.5 所示，区域 D 可以表示为

$$D=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant r(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}\,.$$

于是

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\,.$$

（3）极点 O 在区域 D 内的情形．如图 7.6 所示，区域 D 可以表示为

$$D=\{(r,\theta)\,|\,0\leqslant r\leqslant r(\theta),0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}.$$

于是

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

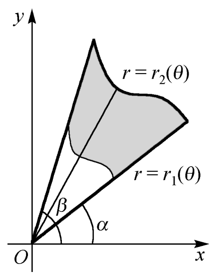


图 7.4　极点 O 在区域 D 外时

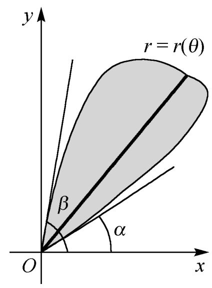


图 7.5　极点 O 在区域 D 边界上时

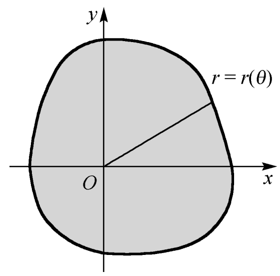


图 7.6　极点 O 在区域 D 内时

注：当区域 D 是圆或圆的一部分，或者区域 D 的边界方程用极坐标表示较为简单，或者被积函数为 $f(x^2+y^2)$，$f\left(\dfrac{x}{y}\right)$，$f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 等形式时，一般采用极坐标计算二重积分.

7.1.11　利用对称性求解二重积分

（1）若积分区域 D 关于 y 轴对称，D 在 y 轴右侧的区域记为 D_1，

①若对 $\forall(x,y)\in D$，有 $f(-x,y)=-f(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；

②若对 $\forall(x,y)\in D$，有 $f(-x,y)=f(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

（2）若积分区域 D 关于 x 轴对称，D 在 x 轴上侧的区域记为 D_1，

①若对 $\forall(x,y)\in D$，有 $f(x,-y)=-f(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；

②若对 $\forall(x,y)\in D$，有 $f(x,-y)=f(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

（3）若积分区域 D 关于原点对称，D 分成关于原点对称的两个区域：D_1 和 D_2，

①若对 $\forall(x,y)\in D$，有 $f(-x,-y)=-f(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；

②若对 $\forall(x,y)\in D$，有 $f(-x,-y)=f(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

7.2　典型例题分析

7.2.1　题型一：多元函数的概念问题

例 7.2.1　求函数 $z=\arcsin(2x)+\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域.

解　$z_1=\arcsin(2x)$ 的定义域为：$-1\leqslant 2x\leqslant 1$；$z_2=\sqrt{4x-y^2}$ 的定义域为：$4x-y^2\geqslant 0$；$z_3=\dfrac{1}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域为：$1-x^2-y^2>0$，$1-x^2-y^2\neq 1$．联立方程组

$$\begin{cases}|2x|\leqslant 1,\\ 4x^2-y^2\geqslant 0,\\ 1-x^2-y^2>0,\\ 1-x^2-y^2\neq 1,\end{cases}$$

因此，所求函数的定义域为

$$\left\{(x,y)\,|-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},y^2\leqslant 4x,0<x^2+y^2<1\right\}.$$

注：（1）求多元函数的定义域，就是要求出使其表达式有意义的点的全体．首先，要写出构成各部分的简单函数的定义域，再解联立不等式，即得所求定义域.

（2）与求一元函数的定义域相仿，需考虑：分式的分母不能为零；偶次方根号下的表达式非负；对数的真数大于零；反正弦、反余弦中的表达式的绝对值小于等于 1，等等.

例 7.2.2　设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y}$，求 $f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$.

解　由题意，

$$f(u,v)=\frac{uv}{u^2+v}.$$

令 $u=xy$，$v=\dfrac{x}{y}$，则

$$f\left(xy,\frac{x}{y}\right)=\frac{xy\cdot\frac{x}{y}}{(xy)^2+\frac{x}{y}}=\frac{xy}{xy^3+1}.$$

例 7.2.3　设 $f(x-y,\ln x)=\left(1-\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y\ln x^x}$，求 $f(x,y)$.

解　令 $u=x-y,v=\ln x$，则 $x=\mathrm{e}^v$，$y=\mathrm{e}^v-u$．又因为

$$f(x-y,\ln x)=\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y\ln x^x}=\frac{(x-y)\mathrm{e}^{x-y}}{x^2\ln x},$$

因此 $f(u,v)=\dfrac{u\mathrm{e}^u}{v\mathrm{e}^{2v}}$．从而 $f(x,y)=\dfrac{x\mathrm{e}^x}{y\mathrm{e}^{2y}}$.

7.2.2　题型二：求解多元函数的极限

例 7.2.4　设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2\neq 0)$，试利用极限的定义证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$．

证　由于

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|=|x^2+y^2|\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2,$$

所以对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时，总有

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

成立，因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$．

例 7.2.5　【2006（3）】设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x},x>0,y>0$．求：

（1）$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty} f(x,y)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$．

解　（1）$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty} f(x,y)=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y}{1+xy}-\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1-y\sin\left(\frac{\pi x}{y}\right)}{\arctan x}$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}\cdot\lim_{y\to+\infty}\left[1-\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{y}\right)}{\frac{\pi x}{y}}\cdot\pi x\right]=\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}.$$

（2）**解法 1**

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1+2\pi x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\pi-x+2\pi x^2}{2(1+x^2)}=\pi.$$

解法 2　利用泰勒展开式.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)+\pi x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi x^2}{x^2}=\pi$$

注：本例是以二元函数极限的形式出现的，但实际上在求极限的过程中只有一个变量在变化，而另一个变量不变化可视为常数.

7.2.3 题型三：求解多元函数的偏导数

例 7.2.6　求下列函数的偏导数：

（1）$z=\ln\sin(x-2y)$；　　（2）$u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{z}$.

解　（1）$z'_x=\dfrac{1}{\sin(x-2y)}\cdot\cos(x-2y)=\cot(x-2y)$，

$z'_y=\dfrac{1}{\sin(x-2y)}\cdot\cos(x-2y)\cdot(-2)=-2\cot(x-2y)$.

（2）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=z\left(\dfrac{x}{y}\right)^{z-1}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{zx^{z-1}}{y^{z}}$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=z\left(\dfrac{x}{y}\right)^{z-1}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-\left(\dfrac{zx^{z}}{y^{z+1}}\right)$，

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{z}\ln\dfrac{x}{y}$.

注：多元函数求偏导问题本质上仍是一元函数的求导问题，因此一元函数的求导公式、法则和技巧均可直接使用．求偏导时，关键是要分清对哪个变量求导，把其余剩余的变量暂时当成常数.

例 7.2.7　设 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^5-y^3}$，求 $f'_x(0,0)$.

解　根据偏导数的定义，有

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^5}}{\Delta x}=0.$$

注：当用公式求出的偏导数在所给点无意义时，应使用偏导数的定义进行求解．例如本例中，由于

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{3}(x^5-y^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot 5x^4=\frac{5x^4}{3\cdot\sqrt[3]{(x^5-y^3)^2}},$$

显然上式在 $(0,0)$ 处没有意义，故应按偏导数的定义求解 $f'_x(0,0)$.

例 7.2.8　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 求偏导数 $f'_x(x,y),\ f'_y(x,y)$.

解　当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，由商的求导法则得：

$$f'_x(x,y)=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-xy\cdot\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x^2+y^2}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$f_y'(x,y)=\frac{x\sqrt{x^2+y^2}-xy\cdot\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y}{x^2+y^2}=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

在 $(x,y)=(0,0)$ 处，根据偏导数的定义有

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0\,,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0\,,$$

故

$$f_x'(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$f_y'(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

注：（1）讨论分段函数的偏导数时，分界点处的偏导数需按偏导数定义单独求得；（2）本题可以使用轮换对称性求 $f_y'(x,y)$．从题设可以看出，在函数 $f(x,y)$ 的表达式中，自变量 x 与 y 的地位是相同的，所谓“地位相同”，指的是 x,y 互换，函数 $f(x,y)$ 的形式没有发生改变．显然本题符合轮换对称性的条件，故在求出 $f_x'(x,y)$之后，将 $f_x'(x,y)$ 表达式中的 x,y 互换，即可得到 $f_y'(x,y)$ 的表达式.

例 7.2.9　设 $z=u\cdot v$， $x=\mathrm{e}^u\cos v$， $y=\mathrm{e}^u\sin v$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$．

解　按复合函数求导法则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=v\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+u\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+u\cdot\frac{\partial v}{\partial y},$$

将 $x=\mathrm{e}^u\cos v,\ y=\mathrm{e}^u\sin v$ 两边对 x 求导，得

$$\begin{cases}1=\mathrm{e}^u\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos v-\mathrm{e}^u\sin v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x},\\ 0=\mathrm{e}^u\dfrac{\partial u}{\partial x}\sin v+\mathrm{e}^u\cos v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}$$

解此方程组得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\cos v}{\mathrm{e}^u},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\sin v}{\mathrm{e}^u}\,.$$

再将 $x=\mathrm{e}^u\cos v,\ y=\mathrm{e}^u\sin v$ 两边对 y 求导，得

$$\begin{cases} 0 = \mathrm{e}^u \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos v - \mathrm{e}^u \sin v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ 1 = \mathrm{e}^u \dfrac{\partial u}{\partial y}\sin v + \mathrm{e}^u \cos v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y}, \end{cases}$$

解此方程组得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin v}{\mathrm{e}^u}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\cos v}{\mathrm{e}^u}.$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v\frac{\cos v}{\mathrm{e}^u} + u\left(-\frac{\sin v}{\mathrm{e}^u}\right) = \frac{v\cos v - u\sin v}{\mathrm{e}^u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = v\frac{\sin v}{\mathrm{e}^u} + u\frac{\cos v}{\mathrm{e}^u} = \frac{v\sin v + u\cos v}{\mathrm{e}^u}.$$

注：本题采用的是多元复合函数的求导法则，通过解方程求得偏导数.

例 7.2.10　已知 $f(x,y) = x^2\arctan\dfrac{y}{x} - y^2\arctan\dfrac{x}{y}$, 求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

解　$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\arctan\dfrac{y}{x} + \dfrac{x^2}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) - \dfrac{y^2}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{y}$

$= 2x\arctan\dfrac{y}{x} - \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} - \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{2x}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2 y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{3y^2(x^2+y^2) - y^3\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

例 7.2.11　设 $f(x,y) = \int_0^{xy}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求 $\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

解　$\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\mathrm{e}^{-x^2y^2}$，　$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\mathrm{e}^{-x^2y^2}$；

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2xy^3\mathrm{e}^{-x^2y^2}$，　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^3y\mathrm{e}^{-x^2y^2}$，　$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = (1-2x^2y^2)\mathrm{e}^{-x^2y^2}$；

于是

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{y}{x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\mathrm{e}^{-x^2y^2}.$$

注：本题为综合题型，考查了复合函数求导法则及变上限函数的求导公式.

7.2.4　题型四：计算多元函数的全微分

例 7.2.12　设 $z = (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}$，求 $\mathrm{d}z$.

解　$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}-(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=(2x+y)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}-(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)=(2y-x)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}.$$

所以

$$\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\left[(2x+y)\mathrm{d}x+(2y-x)\mathrm{d}y\right].$$

例 7.2.13　设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否可微.

解　在点 $(0,0)$ 处有

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{(\Delta x)^2+0^2}}-0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{0\cdot\Delta y}{\sqrt{0^2+(\Delta x)^2}}-0}{\Delta y}=0,$$

而

$$\Delta z-[f_x'(0,0)\cdot\Delta x+f_y'(0,0)\cdot\Delta y]=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-0\cdot\Delta x-0\cdot\Delta y]=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

根据可微的定义，若

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-[f_x'(0,0)\cdot\Delta x+f_y'(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=0,$$

这里 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微．事实上 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 不存在．例如若考虑点 $P(\Delta x,\Delta y)$ 沿着直线 $\Delta y=k\Delta x$ 趋近于 $(0,0)$，则

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{k\Delta x\cdot\Delta x}{(\Delta x)^2+k^2(\Delta x)^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

显然，随着 k 的不同，上述极限值不同，故 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 不存在，从而函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

例 7.2.14 试讨论 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？

解 根据偏导数的定义，有

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0=A\,,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0=B\,,$$

$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的全增量为

$$\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\Delta x\Delta y\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\,.$$

根据全微分的定义，函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微，只需证明当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时，$\Delta z-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y$ 是否为 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小量．而

$$\Delta z-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y=\Delta x\Delta y\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\,,$$

因此只需讨论极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 是否存在．显然

$$0\leqslant\left|\frac{\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\leqslant\left|\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\leqslant\frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\,,$$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$，因此有

$$\Delta z-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y=o(\rho)\,,\quad(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\,.$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微．

7.2.5 题型五：抽象复合函数的偏导数的求解

例 7.2.15 设 $z=f(x^2-y^2,xy)$，且 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

解 首先引进符号 f_1' 表示 f 对第一个中间变量的偏导数；f_2' 表示 f 对第二个中间变量的偏导数，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+yf_2'\,,\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+xf_2'\,,$$

这里 $f_1'=f_1'(x^2-y^2,xy)$，$f_2'=f_2'(x^2-y^2,xy)$，即 f_1' 与 f_2' 仍是复合函数，再引进符号 f_{11}'' 表示 f_1' 再对第一个中间变量的偏导数； f_{12}'' 表示 f_1' 再对第二个中间变量的偏导数；类似定义 f_{21}'' 和 f_{22}''，从而

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=2f_1'+2x(2xf_{11}''+yf_{12}'')+y(2xf_{21}''+yf_{22}'')\\&=2f_1'+4x^2f_{11}''+2xy(f_{12}''+f_{21}'')+y^2f_{22}''=2f_1'+4x^2f_{11}''+4xy\,f_{12}''+y^2f_{22}'',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=2x(-2yf_{11}''+xf_{12}'')+f_2'+y(-2yf_{21}''+xf_{22}'')\\&=f_2'-4xyf_{11}''+2x^2f_{12}''-2y^2f_{21}''+xyf_{22}''=f_2'-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)\,f_{12}''+xy\,f_{22}''.\end{aligned}$$

例 7.2.16 【2005（3）】设 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$g(x,y)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)+yf\left(\dfrac{x}{y}\right)$，求 $x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解 $$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+f'\left(\frac{x}{y}\right),\quad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}&=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right)\\&=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right),\end{aligned}$$

所以

$$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x^2}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

注：本题采用的是一元复合函数的求导法则，计算时还应该注意关于 x 求偏导时，把 y 视为常数；关于 y 求偏导时，把 x 视为常数.

例 7.2.17　设 $z=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+y\mathrm{e}^{xy}f_2',\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+x\mathrm{e}^{xy}f_2',$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=2x[f_{11}''\cdot(-2y)+f_{12}''\cdot x\mathrm{e}^{xy}]+\mathrm{e}^{xy}f_2'+xy\mathrm{e}^{xy}f_2'+y\mathrm{e}^{xy}[f_{21}''\cdot(-2y)+f_{22}''\cdot x\mathrm{e}^{xy}]\\&=-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)\mathrm{e}^{xy}f_{12}''+xy\mathrm{e}^{2xy}f_{22}''+\mathrm{e}^{xy}(1+xy)f_2'.\end{aligned}$$

注：本题是利用多元复合函数的求导法则求二阶偏导数.

7.2.6　题型六：隐函数的求导问题

例 7.2.18　设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 由方程 $x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$ 所确定，求 $\mathrm{d}u$.

解法 1　设 $F(x,y,z)=x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y-z\mathrm{e}^z$，则

$$F_x'=(x+1)\mathrm{e}^x,\ F_y'=-(y+1)\mathrm{e}^y,\ F_z'=-(z+1)\mathrm{e}^z,$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z},$$

而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x'+\frac{\partial z}{\partial x}f_z'=f_x'+\frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}f_z',\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f_y'+\frac{\partial z}{\partial y}f_z'=f_y'-\frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}f_z'.$$

所以

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=\left(f_x'+\frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}f_z'\right)\mathrm{d}x+\left(f_y'-\frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}f_z'\right)\mathrm{d}y.$$

解法 2　根据全微分的定义，有

$$\mathrm{d}u=f_x'\mathrm{d}x+f_y'\mathrm{d}y+f_z'\mathrm{d}z.$$

方程 $x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$ 两边同时取微分，得

$$\mathrm{d}(x\mathrm{e}^x)-\mathrm{d}(y\mathrm{e}^y)=\mathrm{d}(z\mathrm{e}^z),$$

从而

$$(1+x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=(1+z)\mathrm{e}^z\mathrm{d}z,$$

解得

$$\mathrm{d}z=\frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}\mathrm{d}x-\frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}\mathrm{d}y.$$

故

$$\mathrm{d}u=f_x'\mathrm{d}x+f_y'\mathrm{d}y+f_z'\mathrm{d}z=\left(f_x'+\frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}f_z'\right)\mathrm{d}x+\left(f_y'-\frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}f_z'\right)\mathrm{d}y.$$

例 7.2.19　设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数， $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $\mathrm{e}^{xy}-y=0$ 和 $\mathrm{e}^z-xz=0$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解法 1　由题意

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.$$

由 $\mathrm{e}^{xy}-y=0$ 得

$$\mathrm{e}^{xy}\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y\mathrm{e}^{xy}}{1-x\mathrm{e}^{xy}}=\frac{y^2}{1-xy};$$

由 $\mathrm{e}^z-xz=0$ 得

$$\mathrm{e}^z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-z-x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{z}{\mathrm{e}^z-x}=\frac{z}{xz-x}.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y^2}{1-xy}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{z}{xz-x}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

解法 2　方程 $\mathrm{e}^{xy}-y=0$ 和 $\mathrm{e}^z-xz=0$ 两边取全微分得

$$\mathrm{d}\mathrm{e}^{xy}-\mathrm{d}y=0,\quad \mathrm{d}\mathrm{e}^z-\mathrm{d}(xz)=0,$$

从而

$$\mathrm{e}^{xy}(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)-\mathrm{d}y=0,\quad \mathrm{e}^z\mathrm{d}z-x\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x=0,$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y\mathrm{e}^{xy}}{1-x\mathrm{e}^{xy}}=\frac{y^2}{1-xy},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{z}{\mathrm{e}^z-x}=\frac{z}{xz-x}.$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y^2}{1-xy}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{z}{xz-x}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

注：本题为多元复合函数求导及隐函数求导的综合题. $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 为全导数，计算的关键为求出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，它们可由隐函数求导法则得出，也可以通过求微分的方式求出导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

7.2.7　题型七：求多元函数的极值和最值

例 7.2.20　【2009（3）】求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

解　函数 $f(x,y)$ 分别对 x,y 求导数，并令其为 0，即

$$f'_x(x,y)=2x(2+y^2)=0,\quad f'_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0,$$

解得驻点为 $(0,\mathrm{e}^{-1})$．又

$$f''_{xx}=2(2+y^2),\ f''_{yy}=2x^2+\frac{1}{y},\ f''_{xy}=4xy,$$

则

$$A=f''_{xx}|_{(0,\mathrm{e}^{-1})}=2(2+\mathrm{e}^{-2}),\quad B=f''_{xy}|_{(0,\mathrm{e}^{-1})}=0,\quad C=f''_{yy}|_{(0,\mathrm{e}^{-1})}=\mathrm{e}.$$

由于 $AC-B^2>0$，$A>0$，故二元函数存在极小值，极小值为 $f(0,\mathrm{e}^{-1})=-\mathrm{e}^{-1}$.

例 7.2.21　设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

解　方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 两边分别对 x，y 求偏导，得

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0, \tag{7.2.1}$$

$$-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{7.2.2}$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$， $\frac{\partial z}{\partial y}=0$，解得 $x=3y$， $z=y$，代入原方程，可得驻点 $(x,y,z)=(9,3,3)$ 或 $(-9,-3,-3)$．式（7.2.1）关于 x 求偏导得

$$2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

式（7.2.1）关于 y 求偏导得

$$-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

式（7.2.2）关于 y 求偏导得

$$20y-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

所以

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6},\qquad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2},\qquad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(9,3,3)}=\frac{5}{3},$$

由于 $B^2-AC=-\frac{1}{36}<0$，又 $A=\frac{1}{6}>0$，从而点 $(9,3)$ 是 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$．类似地，

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6},\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2},\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3},$$

由于 $B^2-AC=-\frac{1}{36}<0$，又 $A=-\frac{1}{6}<0$ 从而点 $(-9,-3)$ 是 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z(-9,-3)=-3$．

例 7.2.22 求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$， x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值与最小值.

解 （1）在区域 D 的内部，令

$$f_x'(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0,\quad f_y'(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0,$$

解得 $(x,y)=(4,0)$ 和 $(x,y)=(2,1)$.由于 $(4,0)$ 在 D 的边界上，舍去该点.

（2）在边界 $x=0(0\leqslant y\leqslant 6)$ 和 $y=0(0\leqslant y\leqslant 6)$ 上 $f(x,y)=0$．

（3）在边界 $x+y=6$ 上，$y=6-x$，代入 $f(x,y)$ 中得 $z=2x^3-12x^2\ (0\leqslant y\leqslant 6)$．由 $z'=6x^2-24x=0$ 解得 $x=0,\ x=4$．当 $x=0$ 时， $y=6$，当 $x=4$ 时， $y=2$．

比较函数值的大小，

$$f(2,1)=4,\quad f(4,2)=-64,$$

以及在边界 $x=0(0\leqslant y\leqslant 6)$ 和 $y=0(0\leqslant y\leqslant 6)$ 上 $f(x,y)=0$．可知函数的最大值为 $f(2,1)=4$，最小值为 $f(4,2)=-64$．

注：（1）求连续函数在有界闭域 D 上最值的步骤：①求区域 D 内的驻点和不可导点；②求出 D 的边界上可能的极值点；③比较这些点的函数值大小，最大者即为最大值，最小者即为最小值.

（2）本题求解的是闭区域上的最值问题，不是求极值，因此不需要判断点 $(4,2)$ 和 $(2,1)$ 是否为极值.

例 7.2.23　在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.

解　设 $P(x,y)$ 为椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上的任意一点，则 P 到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离

$$d=\frac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}},$$

求 d 的最小值点可转化为求 d^2 的最小值点．构造辅助函数

$$F(x,y,\lambda)=\frac{1}{13}(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4),$$

由拉格朗日乘数法，令

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{4}{13}(2x+3y-6)+2\lambda x=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{6}{13}(2x+3y-6)+8\lambda x=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+4y^2-4=0,$$

解得驻点 $\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$ 和 $\left(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5}\right)$，于是 $d\,|_{(x_1,y_1)}=\frac{1}{\sqrt{13}}$，$d\,|_{(x_2,y_2)}=\frac{11}{\sqrt{13}}$．由问题的实际意义可知最短距离是存在的，因此 $\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$ 即为所求的点.

注：本题考查多元函数的条件极值，使用了拉格朗日乘数法求解．此外，根据问题的实际意义可以判定最值的存在性.

7.2.8　题型八：二重积分的计算

例 7.2.24　设 D 是以点 $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(2,1)$ 为顶点的三角形区域，求 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

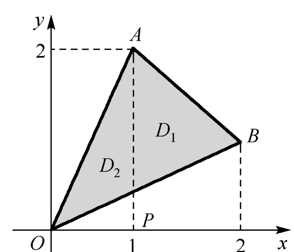


图 7.7　积分区域

解　直线 OA , OB 和 AB 的方程相应为：

$$y=2x,\quad y=\frac{x}{2} \text{和} \ y=3-x,$$

过点 A 向 x 轴作垂线 AP ，它将 D 分为 D_1 和 D_2 两个区域，如图 7.7 所示，其中点 P 的横坐标为 1，因此有

$$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{2x}\mathrm{d}y+\int_1^2 x\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{3-x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x+\int_1^2\left(3x-\frac{3}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^3\Big|_0^1+\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}.$$

例 7.2.25　计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

解　如图 7.8 所示，设

$$D_1=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\},\ D_2=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,x\leqslant y\leqslant 1\},$$

则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y=\mathrm{e}-1.\end{aligned}$$

例 7.2.26　计算 $\iint\limits_D\dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由 $y^2=x$ 与直线 $y=x$ 所围成的区域.

解　积分区域如图 7.9 所示．因为 $\dfrac{\sin y}{y}$ 的原函数不能用初等函数表示出来，所以不能先对 y 积分.

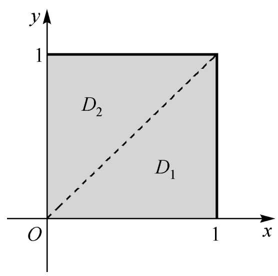


图 7.8　积分区域

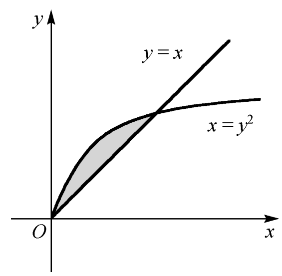


图 7.9　积分区域

$$\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\mathrm{d}x=\int_0^1(1-y)\sin y\mathrm{d}y=1-\sin 1.$$

例 7.2.27　设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ ，其中 D 是由 $y=0$ ，$y=x^2$ ，$x=1$ 所围成的区域，则 $f(x,y)=$（　　）.

（A） xy　　（B） $2xy$　　（C） $xy+\dfrac{1}{8}$　　（D） $xy+1$

解　记 $\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=I$ ，则 $f(x,y)=xy+I$ ，等式两端同时取二重积分得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma+I\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}xy\mathrm{d}y+I\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}I,$$

即 $I=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{3}I$ ，解得 $I=\dfrac{1}{8}$ ．所以 $f(x,y)=xy+\dfrac{1}{8}$ ．故应选 C.

例 7.2.28　【2014（1）】设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$（　　）.

（A） $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x-1}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

（B）$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$

（C）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

（D）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

解　如图 7.10 所示，积分区域为 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 1-y\}$，因此

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr,$$

故选 D.

例 7.2.29　【2006（1）】设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$,计算二重积分

$$I=\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy.$$

解　如图 7.11 所示，D 为右半单位圆，它关于 x 轴对称，$\dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}$ 为 y 的奇函数.

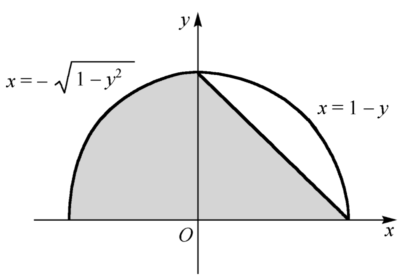


图 7.10　积分区域

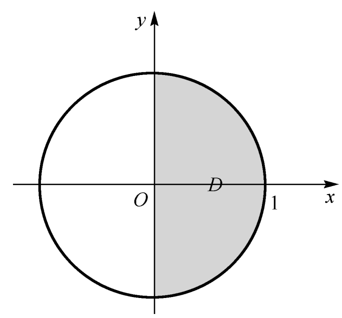


图 7.11　积分区域

于是

$$\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0,$$

记 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ 关于 y 为偶函数，因此

$$I=\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy+\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=2\iint_{D_1} \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy,$$

令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，积分区域 D_1 在极坐标系中表示为：$0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1$.故

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{1}{1+r^2} r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ln 2 .$$

注：被积函数为 $f(x^2+y^2)$，$f\left(\dfrac{x}{y}\right)$，$f\left(\dfrac{y}{x}\right)$等形式时，一般采用极坐标计算二重积分.

例 7.2.30 【2015（3）】计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$$D = \{(x,\ y)\big| x^2+y^2 \leqslant 2,\ y \geqslant x^2\} .$$

解　如图 7.12 所示，积分区域关于 y 轴对称，$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，因此

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2\mathrm{d}y = 2\int_0^1 x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x - \frac{2}{5} = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t - \frac{2}{5} \\
&= \int_0^{\pi} \sin^2 2t\mathrm{d}t - \frac{2}{5} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 4t)\mathrm{d}t - \frac{2}{5} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

注：二重积分计算中利用对称性可以简化计算.

例 7.2.31 【2012（3）】计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

解　积分区域如图 7.13 所示，根据广义二重积分的定义，有

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \mathrm{e}^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\lim_{b\to 0^+}\int_b^1 (1-x^2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to 0^+}\int_b^1 (1-x^2)\mathrm{d}\mathrm{e}^x = \frac{1}{2}\lim_{b\to 0^+}\left[(1-x^2)\mathrm{e}^x\Big|_b^1 + 2\int_b^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to 0^+}\left[(b^2-1)\mathrm{e}^b + 2x\mathrm{e}^x\Big|_b^1 - 2\mathrm{e}^x\Big|_b^1\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to 0^+}\left[(b^2-1)\mathrm{e}^b - 2b\mathrm{e}^b + 2\mathrm{e}^b\right] = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

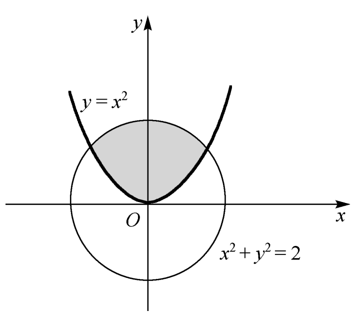


图 7.12　积分区域

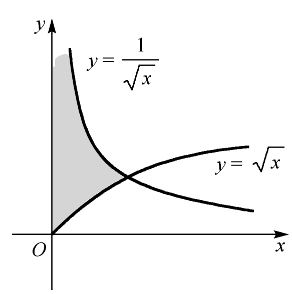


图 7.13　积分区域

7.2.9　题型九：实际应用题

例 7.2.32【2012（3）】某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10 000（万元），设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x（件）和 y（件），且两种产品的边际成本分别为 $20+\dfrac{x}{2}$（万元/件）与 $6+y$（万元/件）.

（1）求生产甲乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$（万元）；

（2）当总产量为 50 件时，甲乙两种的产量各为多少时可以使总成本最小？求最小成本；

（3）求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义.

解　（1）由题设可知

$$C_x'(x,y)=20+\frac{x}{2},\quad C_y'(x,y)=6+y,$$

总成本函数为

$$C(x,y)=\int C_x'(x,y)\mathrm{d}x=\int\left(20+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=20x+\frac{x^2}{4}+\phi(y),$$

且 $\phi'(y)=C_y'(x,y)=6+y$，故

$$\phi(y)=\int(6+y)\mathrm{d}y=6y+\frac{1}{2}y^2+C_0,$$

其中 C_0 为任意常数. 从而

$$C(x,y)=20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{1}{2}y^2+C_0,$$

当 $x=0$，$y=0$ 时，$C=10000$，解得 $C_0=10000$，所以总成本函数为

$$C(x,y)=20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{1}{2}y^2+10000.$$

（2）构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=C(x,y)+\lambda(x+y-50),$$

令

$$L_x'=20+\frac{1}{2}x+\lambda=0,\quad L_y'=6+y+\lambda=0,\quad L_\lambda'=x+y-50=0,$$

解得唯一驻点 $(x,y)=(24,26)$，由实际意义可知，该驻点即为最小值点，因此当 $x=24$，$y=26$ 时，总成本最小，最小成本为 $C(24,26)=11118$（万元）.

（3）当总产量为 50 件，且总成本最小时，$C_x'(24,26)=32$，其经济意义为：在总产量为 50 件，且甲产品产量为 24 件时，再多生产一个甲产品，总成本会增加 32 万元.

例 7.2.33　在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$（$a>0,b>0,c>0$）内接的长方体（各边分别平行坐标轴）中，求其体积最大者.

解　设 x,y,z 为长方体在第一卦限中的顶点坐标，则长方体的体积为 $V=8xyz$，因为点 (x,y,z) 在椭球面上，所以它满足方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

所求问题转化为求解函数$V=8xyz$在满足条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$下的最大值问题. 构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=8yz+\dfrac{2x}{a^2}\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=8zx+\dfrac{2y}{b^2}\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=8xy+\dfrac{2z}{c^2}\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$$

该方程组在第一卦限$(x>0,y>0,z>0)$只有一组解$x=\frac{a}{\sqrt{3}}$，$y=\frac{b}{\sqrt{3}}$，$z=\frac{c}{\sqrt{3}}$.

下面说明这组解即为所求的解．事实上，这个问题是求连续函数

$$V=8xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

在闭域$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$上的最大值问题．根据闭区域上的连续函数的性质可知，函数的最大值一定存在，因为在边界上$V=0$，所以最大值不可能在边界上取到，故只能又在开域$x>0,\ y>0,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$内取到，从而唯一驻点$\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$即为最大值点，且长方体的最大体积为$\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

7.3　深 化 训 练

7.3.1　填空题

（1）设$z=\mathrm{e}^{-x}-f(x-2y)$，且当$y=0$时，$z=x^2$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$________.

（2）设$z=(xy+1)^x$, 则$\frac{\partial z}{\partial x}=$________.

（3）设函数$z=z(x,y)$由方程$z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$确定，则$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

（4）【2009（3）】设$z=(x+\mathrm{e}^y)^x$，则$\frac{\partial z}{\partial x}\big|_{(1,0)}=$________.

（5）【2007（3）】设 $f(u,v)$ 是二元可微函数， $z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

（6）设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\phi(x+y)$，其中 f、ϕ 具有二阶连续导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

（7）【2015（3）】若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=$________.

（8）【2009（1）】设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数， $z=f(x,xy)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

（9）【2011（1）】设函数 $F(x,y)=\displaystyle\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$________.

（10）【2013（3）】设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}|_{(1,2)}=$________.

（11）【2014（3）】二次积分 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x=$________.

（12）【2008（3）】设 $D=\{(x,\ y)\big|x^2+y^2\leqslant 1\}$，则 $\displaystyle\iint\limits_D(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

（13）积分 $\displaystyle\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的值等于________.

（14）设区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant R^2$，则 $\displaystyle\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

（15）【2011（2）】设平面区域 D 由直线 $y=x$ 与圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴围成，则二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=$________.

（16）【2014（3）】设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为________.

7.3.2　单项选择题

（1）已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则________.

（A）点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点
（B）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点
（C）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点
（D）根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

（2）设 $z=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$，则点 $\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$ 是该函数的________.

（A）驻点，但不是极值点　　（B）驻点，且是极小值点
（C）驻点，且是极大值点　　（D）驻点，偏导数不存在的点

（3）设函数 $z=f(x,y)$，有 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$，且 $f(x,0)=1$， $f_y'(x,0)=x$，则 $f(x,y)=$________.

（A）$1-xy+y^2$　　（B）$1+xy+y^2$
（C）$1-x^2y+y^2$　　（D）$1+x^2y+y^2$

（4）【2005（3）】设

$$I_1=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $D=\{(x,\ y)\big|x^2+y^2\leqslant 1\}$，则（　　）.

（A）$I_3>I_2>I_1$　　（B）$I_1>I_2>I_3$

（C）$I_2>I_1>I_3$　　（D）$I_3>I_1>I_2$

（5）【2006（1）】设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于（　　）.

（A）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$　　（B）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

（C）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$　　（D）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

（6）【2015（1）】设 D 是第一象限由曲线 $2xy=1$, $4xy=1$ 与直线 $y=x$, $y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域,函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_______ .

（A）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

（B）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

（C）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$

（D）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$

（7）【2010（2）】$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$（　　）.

（A）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$　　（B）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$

（C）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$　　（D）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$

7.3.3　求下列二元函数的极限：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$；（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$.

7.3.4　讨论函数 $z=f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在（0, 0）处，

（1）是否连续；（2）偏导数是否存在；（3）是否可微；（4）偏导数是否连续.

7.3.5　设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由方程 $\mathrm{e}^{xy}-xy=2$ 和 $\mathrm{e}^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

7.3.6　求 $u=\ln(2x+3y+4z^2)$ 的全微分.

7.3.7　求函数 $z=3axy-x^3-y^3(a>0)$ 的极值.

7.3.8　设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ 所确定的隐函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

7.3.9　求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最值.

7.3.10　【2010（3）】求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

7.3.11　计算 $\iint\limits_D y^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 与 $x^2+y^2=4\pi^2$ 所围成的平面区域.

7.3.12　【2006（3）】计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{y^2-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=1$，$x=0$ 所围成的平面区域.

7.3.13　【2009（3）】计算二重积分 $\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域

$$D=\{(x,\ y)\big|(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2,\ y\geqslant x\}.$$

7.3.14　【2013（3）】设平面区域 D 由直线 $x=3y$，$y=3x$，$x+y=8$ 围成，计算 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

7.3.15　【2014（3）】设平面区域 $D=\{(x,\ y)\big|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$，计算 $\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

7.4　深化训练详解

7.3.1　填空题

（1）$2(x-2y)-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x+2y}$；**提示**　把 $y=0$，$z=x^2$ 代入函数表达式得 $x^2=\mathrm{e}^{-x}-f(x)$，从而 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}-x^2$，因此 $z=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x+2y}+(x-2y)^2$，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2(x-2y)-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x+2y}.$$

（2）$(xy+1)^x\left[\ln(x+y)+\frac{xy}{xy+1}\right]$；**提示**　两边取对数，有

$$\ln z=x\ln(xy+1),$$

上式两边对 x 求偏导数，得

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy+1)+x\frac{y}{xy+1},$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(xy+1)^x\left[\ln(xy+1)+\frac{xy}{xy+1}\right].$$

（3）2；**提示**　方程两边分别关于 x,y 求偏导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{2x-3z}\left(2-3\frac{\partial z}{\partial x}\right),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{2x-3z}\left(-3\frac{\partial z}{\partial y}\right)+2,$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}},$$

故

$$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{6\mathrm{e}^{2x-3z}+2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}=2.$$

（4）$2\ln 2+1$；**提示**　为简化计算，先将 $y=0$ 代入 z 中得到 $z(x,0)=(x+1)^x$，z 转化为 x 的一元函数．因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}(x+1)^x}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{x\ln(x+1)}\right]=\mathrm{e}^{x\ln(x+1)}\left[\ln(x+1)+\frac{x}{1+x}\right].$$

将 $x=1$ 代入上式，得到

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\mathrm{e}^{\ln 2}\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)=2\ln 2+1.$$

（5）$-\dfrac{2y}{x}f_1'+\dfrac{2x}{y}f_2'$；**提示**　因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f_1'+\frac{1}{y}f_2',\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f_1'-\frac{x}{y^2}f_2',$$

则

$$x\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2',\quad y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x}f_1'-\frac{x}{y}f_2'.$$

两式合并得，

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2'-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2'=-\frac{2y}{x}f_1'+\frac{2x}{y}f_2'.$$

（6）$yf''(xy)+\phi'(x+y)+y\phi''(x+y)$；**提示**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+y\phi'(x+y),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=-\frac{1}{x^2}f'(xy)\cdot x+\frac{1}{x}f'(xy)+\frac{y}{x}f''(xy)\cdot x+\phi'(x+y)+y\phi''(x+y)\\&=yf''(xy)+\phi'(x+y)+y\phi''(x+y).\end{aligned}$$

（7）$-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y$；**提示**　方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 两边分别对 x,y 求偏导得

$$\mathrm{e}^{x+2y+3z}\left(1+3\frac{\partial z}{\partial x}\right)+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$\mathrm{e}^{x+2y+3z}\left(2+3\frac{\partial z}{\partial y}\right)+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

将 $x=0,\ y=0$ 代入原方程求得 $z=0$，从而解得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=-\frac{1}{3},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-\frac{2}{3}.$$

故

$$\mathrm{d}z=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}\mathrm{d}y=-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y.$$

（8）$f_{12}''x+f_{22}''xy+f_2'$；**提示**　$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_1'y$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{12}''x+f_{22}''xy+f_2'$.

（9）4；**提示**　先将 $y=2$ 代入函数 F 中得，

$$F(x,2)=\int_0^{2x}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

利用变上限积分函数的导数公式得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2\sin 2x}{1+4x^2},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{4(1+4x^2)\cos 2x-16x\sin 2x}{(1+4x^2)^2},$$

故

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=\left.\frac{4(1+4x^2)\cos 2x-16x\sin 2x}{(1+4x^2)^2}\right|_{x=0}=4.$$

（10）$2-2\ln 2$；**提示**　方程 $(z+y)^x=xy$ 两边取对数，得

$$x\ln(z+y)=\ln(xy)=\ln x+\ln y,$$

方程两边对 x 求偏导得到

$$\ln(z+y)+\frac{x}{z+y}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}.$$

将 $x=1,y=2$ 代入所给方程得到 $z+2=2$，即 $z=0$．将 $x=1,y=2,z=0$ 代入上式有

$$\ln 2+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=1,$$

即 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2-2\ln 2$.

（11）$\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$；**提示**　如图 7.14 所示，二次积分的积分区域为

$$D=\{(x,\ y)|0\leqslant y\leqslant 1,\ y\leqslant x\leqslant 1\}=\{(x,\ y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}.$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}y - \int_0^1 \mathrm{e}^{y^2}(1-y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y + \int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}(y^2) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{y^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).\end{aligned}$$

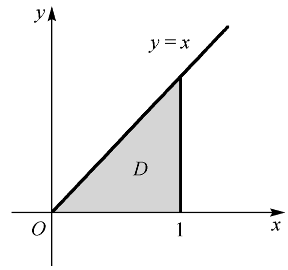


图 7.14　积分区域

（12）$\frac{\pi}{4}$；**提示**

$$\iint_D (x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 0 = \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}.$$

（13）$\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4})$；**提示**　由于被积函数 e^{-y^2} 的原函数不能用初等函数表示，所以应改变二次积分的积分次序，故

$$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x = \int_0^2 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4}).$$

（14）$\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$；**提示**　在极坐标系下化二重积分为二次积分：

$$\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\cdot r^3\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

（15）$\frac{7}{12}$；**提示**　如图 7.15 所示，在极坐标系下积分区域 D 可表示为

$$0 \leqslant r \leqslant 2\sin\theta,\quad \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_D xy\mathrm{d}\sigma &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r^2\sin\theta\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{1}{4}(2\sin\theta)^4\mathrm{d}\theta \\ &= 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\mathrm{d}\sin\theta = \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

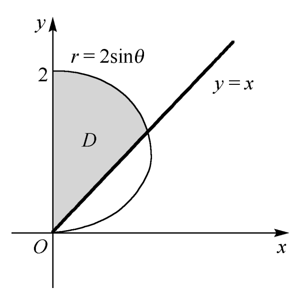


图 7.15　积分区域

（16）$\frac{3}{2}-\ln 2$；**提示**　$D=\left\{(x,\ y)\middle|1\leqslant y\leqslant 2,-y\leqslant x\leqslant -\frac{1}{y}\right\}$，则 D 的面积为

$$S=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}y\int_{-y}^{-\frac{1}{y}}\mathrm{d}x=\int_1^2\left(-\frac{1}{y}+y\right)\mathrm{d}y=\left(-\ln y+\frac{y^2}{2}\right)_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2\,.$$

7.3.2　单项选择题

（1）A；**提示**　由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，分母的极限为零，因此分子的极限必为零，从而有 $f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$，且当 $|x|$ 和 $|y|$ 都充分小时，有

$$f(x,y)-xy\approx(x^2+y^2)^2.$$

于是

$$f(x,y)-f(0,0)\approx xy+(x^2+y^2)^2.$$

可见当 $y=x$ 且 $|x|$ 充分小时，

$$f(x,y)-f(0,0)\approx x^2+4x^4>0;$$

而当 $y=-x$ 且 $|x|$ 充分小时，

$$f(x,y)-f(0,0)\approx -x^2+4x^4<0.$$

说明函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的充分小的邻域内既不恒大于 $f(0,0)$，又不恒小于 $f(0,0)$，所以点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

（2）B；**提示**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(2x+2y^2+4y+1)\mathrm{e}^{2x}\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=(2y+2)\mathrm{e}^{2x}\,,$$

将 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ 代入满足方程，是驻点．且

$$A=4(x+y^2+2y+1)\mathrm{e}^{2x}\Big|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=2\mathrm{e}>0\,,\quad B=(4y+4)\mathrm{e}^{2x}\Big|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=0\,,$$

$$C=2\mathrm{e}^{2x}\Big|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)}=2\mathrm{e}\,.$$

$AC-B^2>0$，$A>0$，因此 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ 为函数的极小值点.

（3）B；**提示**　等式 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$ 两边对 y 积分，得 $f_y'(x,y)=2y+\varphi(x)$，将 $f_y'(x,0)=x$ 代入上式，得 $\varphi(x)=x$，于是 $f_y'(x,y)=2y+x$，该式两边再对 y 积分，得 $f(x,y)=y^2+xy+\varphi(x)$，将 $f(x,0)=1$ 代入上式，得 $\varphi(x)=1$，故 $f(x,y)=y^2+xy+1$.

（4）A；**提示**　在积分区域 D: $x^2+y^2\leqslant 1$ 上，有

$$(x^2+y^2)^2\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1<\frac{\pi}{2},$$

而 $\cos x$ 在第一象限内单调递减，故

$$\cos(x^2+y^2)^2\geqslant\cos(x^2+y^2)\geqslant\cos\sqrt{x^2+y^2},$$

又因为 $\cos(x^2+y^2)^2,\cos(x^2+y^2),\cos\sqrt{x^2+y^2}$ 在 D 内均连续，且至少存在 D 内的一点，使得三个函数在该点的值两两不等，故由二重积分的性质可知，

$$I_3=\iint_D\cos(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}\sigma>I_2=\iint_D\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma>I_1=\iint_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma.$$

（5）C；**提示**　本题考查坐标系变换.题中所给的积分是极坐标下的积分，需要把其转换成直角坐标系的积分．积分区域 D 在极坐标系下表示为：

$$D=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant r\leqslant 1\right\}.$$

若转换为先 y 后 x 的积分顺序，此时应分为两部分各自积分后求和：

①当 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，对应的积分为 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y$；

②当 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时，对应的积分为 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$．因此

$$原式=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

若转换为先 x 后 y 的积分顺序，积分区域可表示为：

$$D:0\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2},y\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2},$$

故

$$原式=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

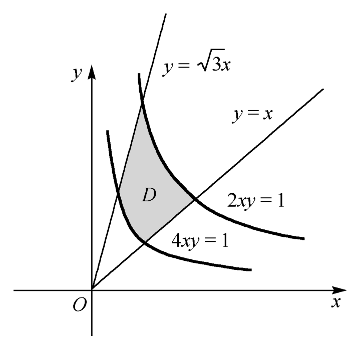


图 7.16　积分区域

（6）B；**提示**　如图 7.16 所示，在极坐标系下二重积分的积分区域为

$$D=\left\{(r,\theta)\,|\,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}\right\},$$

则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

故选 B.

（7）D；**提示**　对题设的极限式进行恒等变换

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\right),$$

由定积分的定义可将极限转化为定积分，故

$$\text{原式}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{(1+x)(1+y^2)}.$$

7.3.3　（1）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin u}{u}\cdot\lim\limits_{y\to2}y=2$.

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{(\sqrt{1+xy}-1)(\sqrt{1+xy}+1)}{xy(\sqrt{1+xy}+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1}{\sqrt{1+xy}+1}=\dfrac{1}{2}$.

7.3.4　（1）当$(x,y)\neq(0,0)$时，$|f(x,y)|\leqslant x^2+y^2$，故$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，所以函数在$(0,0)$处连续.

（2）$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}=0$，

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}y\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{y^2}}=0$.

（3）由（2）知，$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，故

$$\Delta z-[f'_x(0,0)\cdot\Delta x+f'_y(0,0)\cdot\Delta y]=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-[0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y]$$

$$=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

因为

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{\Delta z-[f'_x(0,0)\cdot\Delta x+f'_y(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\rho\sin\frac{1}{\rho}=0,$$

故函数$f(x,y)$在$(0,0)$点可微，且$\mathrm{d}z|_{(0,0)}=0\cdot\mathrm{d}x+0\cdot\mathrm{d}y=0$.

（4）当$(x,y)\neq(0,0)$时

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

由于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

而

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

不存在，事实上若沿着直线 $y=x$ 方向趋于原点时，即

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=x}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|},$$

上述极限不存在，故偏导数 $f_x'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续，同样 $f_y'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

7.3.5　由 $e^{xy}-xy=2$ 两边对 x 求导，得

$$e^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)-\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0,$$

解得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$，又由 $e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$ 两边对 x 求导，得

$$e^x=\frac{\sin(x-z)}{x-z}\cdot\left(1-\frac{dz}{dx}\right),$$

即 $\frac{dz}{dx}=1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}$. 故

$$\frac{du}{dx}=f_1'+\frac{dy}{dx}f_2'+\frac{dz}{dx}f_3'=f_1'-\frac{y}{x}f_2'+\left[1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right]f'.$$

7.3.6　$du=d\ln(2x+3y+4z^2)=\frac{1}{2x+3y+4z^2}d(2x+3y+4z^2)$

$$=\frac{2}{2x+3y+4z^2}dx+\frac{3}{2x+3y+4z^2}dy+\frac{8z}{2x+3y+4z^2}dz.$$

7.3.7　$\frac{\partial z}{\partial x}=3ay-3x^2$，$\frac{\partial z}{\partial y}=3ax-3y^2$，令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$，解得驻点 $(0,0)$，(a,a). 而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3a,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6y,$$

在点 $(0,0)$ 处有

$$A=0,\quad B=3a,\quad C=0,\quad AC-B^2=-9a^2<0,$$

故 $(0,0)$ 不是函数的极值点. 在点 (a,a) 处有

$$A=-6a,\quad B=3a,\quad C=-6a,\quad AC-B^2=27a^2>0,$$

故函数在 (a,a) 处取得极大值，极大值为 $z(a,a)=a^3$.

7.3.8　**解法 1**　构造辅助函数

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11.$$

则

$$F_x'=2x-2\ ，\ F_y'=2y+4\ ，\ F_z'=2z-6\ ，$$

从而

$$z_x'=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{2x-2}{2z-6}=-\frac{x-1}{z-3}\ ，\ z_y'=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{2y+4}{2z-6}=-\frac{y+2}{z-3}\ .$$

令 $z_x'=0$ ， $z_y'=0$ ，解得 $x=1$ ， $y=-2$ ．将 $x=1$ ， $y=-2$ 代入原方程，解得 $z=-2$ 或 $z=8$ ．又因为

$$z_{xx}''=-\frac{(z-3)-(x-1)z_x'}{(z-3)^2}=-\frac{(z-3)^2+(x-1)^2}{(z-3)^3}\ ，$$

$$z_{xy}''=\frac{(x-1)z_y'}{(z-3)^2}=-\frac{(x-1)(y+2)}{(z-3)^3}\ ，$$

$$z_{yy}''=-\frac{(z-3)-(y+2)z_y'}{(z-3)^2}=-\frac{(z-3)^2+(y+2)^2}{(z-3)^3}\ .$$

在 $x=1$ ， $y=-2$ ， $z=-2$ 处

$$A=\frac{1}{5}\ ，\ B=0\ ，\ C=\frac{1}{5}\ ，\ AC-B^2>0\ ，\ A>0\ ，$$

故函数在该点出取得极小值，亦即最小值，最小值为 $z=-2$.

在 $x=1$ ， $y=-2$ ， $z=8$ 处

$$A=-\frac{1}{5}\ ，\ B=0\ ，\ C=-\frac{1}{5}\ ，\ AC-B^2>0\ ，\ A<0\ ，$$

故函数在该点出取得极大值，亦即最大值，最大值为 $z=8$.

解法 2　利用几何意义．方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ 可变形为

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25\ ，$$

于是

$$z=3\pm\sqrt{25-(x-1)^2-(y+2)^2}\ ，$$

显然，当 $x=1,\ y=-2$ 时，根号中的极大值为 5 .由此可知， $z=3\pm5$ 为极值， $z=8$ 为极大值， $z=-2$ 为极小值.

7.3.9　（1）在椭圆域 D 的内部，令

$$f_x'(x,y)=2x=0\ ，\ f_y'(x,y)=-2y=0\ ，$$

求得 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域内存在唯一驻点 $(0,0)$.

（2）在椭圆边界上，则有 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ ，因此函数 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 可化为

$$f(x,y)=x^2-(4-4x^2)+2=5x^2-2\ ，\ -1\leqslant x\leqslant 1\ ，$$

解得驻点 $x=0$，此时 $y=\pm 2$．故在椭圆域 D 边界上可能的最值点为 $(-1,0)$，$(1,0)$，$(0,-2)$，$(0,2)$．

由于

$$f(\pm 1,0)=3,\quad f(0,\pm 2)=-2,\quad f(0,0)=2,$$

因此 $f(x,y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为 3，最小值为 -2．

7.3.10　构造辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-10),$$

令

$$\begin{cases} F_x'=y+2\lambda x=0, \\ F_y'=x+2z+2\lambda y=0, \\ F_z'=2y+2\lambda z=0, \\ F_\lambda'=x^2+y^2+z^2-10=0. \end{cases}$$

得到可能的极值点有 $(1,\sqrt{5},2)$，$(-1,\sqrt{5},-2)$，$(1,-\sqrt{5},2)$，$(-1,-\sqrt{5},-2)$，$(2\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$，$(-2\sqrt{2},0,\sqrt{2})$．

比较函数 u 在各点处的函数值可知，在点 $(1,\sqrt{5},2),(-1,-\sqrt{5},-2)$ 处取得最大值，最大值为 $5\sqrt{5}$；在点 $(1,-\sqrt{5},2),(-1,\sqrt{5},-2)$ 处取得最小值，最小值为 $-5\sqrt{5}$．

7.3.11　令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则 D 在极坐标系下可表示为

$$1\leqslant r\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

从而

$$\begin{aligned}\iint_D y^2\mathrm{d}\sigma &=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{2\pi} r^2\sin^2\theta\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot\left(\frac{r^4}{4}\sin^2\theta\right)\Bigg|_1^{2\pi} \\ &=\left(4\pi^4-\frac{1}{4}\right)\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\left(4\pi^4-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \\ &=4\pi^5-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

7.3.12　如图 7.17 所示，在直角坐标系中积分区域 $D=\{(x,\ y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant y\}$，于是

$$\begin{aligned}\iint_D\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x \\ &=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}(y^2-xy)\cdot\left(-\frac{1}{y}\right) \\ &=-\int_0^1\left[\frac{1}{y}\frac{2}{3}(y^2-xy)^{\frac{3}{2}}\right]_0^y\mathrm{d}y \\ &=\frac{2}{3}\int_0^1 y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

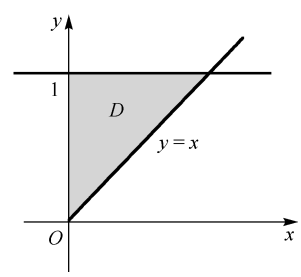


图 7.17　积分区域

7.3.13　积分区域如图 7.18 所示．

由 $(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 2$，解得 $r \leqslant 2(\sin\theta+\cos\theta)$，所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)} (r\cos\theta - r\sin\theta) r\mathrm{d}r \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{1}{3}(\cos\theta-\sin\theta)r^3 \Big|_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}\right]\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^3\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin\theta+\cos\theta)^3 \mathrm{d}(\sin\theta+\cos\theta) \\ &= \frac{8}{3}\times\frac{1}{4}(\sin\theta+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

7.3.14　如图 7.19 所示，直线 $x=3y$ 与 $y=3x$ 的交点为 $(0,0)$，直线 $x=3y$ 与 $x+y=8$ 的交点为 $(6,2)$，直线 $y=3x$ 与 $x+y=8$ 的交点为 $(2,6)$.

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^2 x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{3x}\mathrm{d}y + \int_2^6 x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{8}{3}x^3\mathrm{d}x + \int_2^6 (8x^2-\frac{4}{3}x^3)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}x^4\Big|_0^2 + \frac{1}{3}(8x^3-x^4)\Big|_2^6 = \frac{416}{3}\end{aligned}$$

7.3.15　积分区域如图 7.20 所示．令 $x=r\cos\theta$， $y=r\sin\theta$，因此

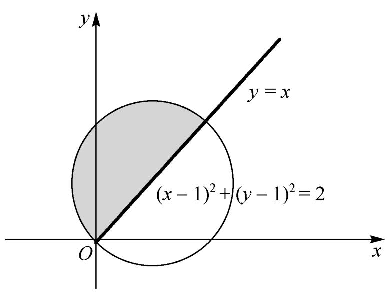


图 7.18　积分区域

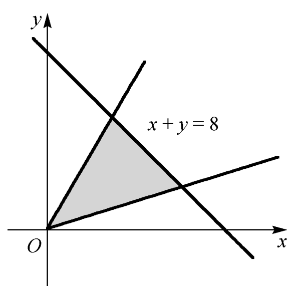


图 7.19　积分区域

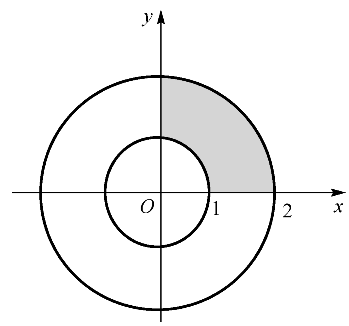


图 7.20　积分区域

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\sin(\pi r)\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\cdot\frac{1}{\pi}[-r\cos(\pi r)\Big|_1^2 + \int_1^2\cos(\pi r)\mathrm{d}r] \\ &= -\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

若记 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta$，则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta$，故

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2},$$

从而 $I=\dfrac{\pi}{4}$. 所以

$$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{4}.$$

7.5　综合提高训练

例 7.5.1　函数 $f(x,y)$ 在点（x_0,y_0）处的偏导数都存在，是 $f(x,y)$ 在该点处________.

（A）连续的充分条件　　（B）连续的必要条件

（C）可微的必要条件　　（D）可微的充分条件

解　选项 A 不正确，若取函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

显然有 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

选项 B 不正确．例如取 $f(x,y)=|xy|$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处连续，但偏导数 $f_x'(0,1)$ 不存在.

选项 D 不正确．例如取函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处有 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$，由例 7.2.13 可知，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

选项 C 正确．若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 都存在，且 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

例 7.5.2　【2012（3）】设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=$ ________.

解　依据可微的定义，所给极限可以整理为

$$\begin{aligned}0&=\lim_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{f(x,y)-1-[2x-1(y-1)]}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}\\&=\lim_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{f(x,y)-f(0,1)-[f_x'(0,1)(x-0)+f_y'(0,1)(y-1)]}{\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}},\end{aligned}$$

比较易知 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处可微，且

$$f_x'(0,1)=2,\ f_y'(0,1)=-1,\ f(0,1)=1,$$

故

$$\mathrm{d}z\big|_{(0,1)} = f_x'(0,1)\mathrm{d}x + f_y'(0,1)\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x - \mathrm{d}y .$$

例 7.5.3　设函数 $f(x,y)$ 可微，且满足

$$f_x'(x,y) = -f(x,y),\ f\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = 1，\ \lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right]^n = \mathrm{e}^{\cot y} ,$$

求 $f(x,y)$ 的表达式.

解法 1　先计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)-f(0,y)}{f(0,y)}\right]^n = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)-f(0,y)}{\frac{1}{n}\cdot f(0,y)}} = \mathrm{e}^{\frac{f_y'(0,y)}{f(0,y)}} ,$$

由题意，得

$$\frac{f_y'(0,y)}{f(0,y)} = \frac{\mathrm{d}\ln f(0,y)}{\mathrm{d}y} = \cot y ,$$

对 y 积分得

$$\ln f(0,y) = \ln\sin y + \ln C ,$$

故 $f(0,y) = C\sin y$．由 $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = 1$，解得 $C = 1$，即 $f(0,y) = \sin y$．又由 $f_x'(x,y) = -f(x,y)$ 对 x 积分得

$$f(x,y) = \phi(y)\mathrm{e}^{-x} ,$$

由 $f(0,y) = \sin y$ 知，$\phi(y) = \sin y$，所以 $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\sin y$.

解法 2　视 y 为常数，求解分离变量方程 $\dfrac{\mathrm{d}f(x,y)}{f(x,y)} = -\mathrm{d}x$，得

$$\ln f(x,y) = -x + \ln\phi(y) ,$$

即 $f(x,y) = \phi(y)\mathrm{e}^{-x}$．由题意，得

$$\mathrm{e}^{\cot y} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\phi\left(y+\frac{1}{n}\right)}{\phi(y)}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{\phi\left(y+\frac{1}{n}\right)-\phi(y)}{\phi(y)}\right]^n = \mathrm{e}^{\frac{\phi'(y)}{\phi(y)}} ,$$

因此 $\dfrac{\phi'(y)}{\phi(y)} = \cot y$，两边积分并整理得 $\phi(y) = C\sin y$，又因为 $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$，解得 $C = 1$，故 $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\sin y$.

例 7.5.4　设 $z = z(x,y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 - z = \phi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 ϕ 具有二阶导数，且 $\phi' \neq -1$.

（1）求 $\mathrm{d}z$；

（2）记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

解　（1）令

$$F(x,y,z)=x^2+y^2-z-\phi(x+y+z),$$

则

$$F_x'=2x-\phi'，\quad F_y'=2y-\phi'，\quad F_z'=-1-\phi'\neq 0，$$

因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{2x-\phi'}{1+\phi'}，\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{2y-\phi'}{1+\phi'}，$$

所以

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{1}{1+\phi'}\left[(2x-\phi')\mathrm{d}x+(2y-\phi')\mathrm{d}y\right].$$

（2）由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2(x-y)}{1+\phi'}，$$

故 $u(x,y)=\dfrac{2}{1+\phi'}$，注意到 $\phi'=\phi'(x+y+z)$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2}{(1+\phi')^2}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\phi''=-\frac{2(1+2x)\phi''}{(1+\phi')^3}.$$

例 7.5.5　计算 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant r^2$.

解　由积分中值定理知，存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\pi r^2,$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\lim_{r\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\pi r^2}{\pi r^2}\\&=\lim_{\substack{\xi\to 0\\ \eta\to 0}}\mathrm{e}^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)=1.\end{aligned}$$

例 7.5.6　计算 $\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=x^3$, $y=1$, $x=-1$ 围成的区域，f 是 D 上的连续函数.

解　将积分区域 D 分成四部分．如图 7.21 所示，其中

$$D_1=\{(x,y)\,|\,y\geqslant x^3,y\leqslant 1,x>0\}，\quad D_2=\{(x,y)\,|\,y\geqslant -x^3,y\leqslant 1,x\leqslant 0\}，$$

$$D_3=\{(x,y)\,|\,y<-x^3,y\geqslant 0,x\geqslant -1\}，\quad D_4=\{(x,y)\,|\,y\geqslant x^3,y<0,x\geqslant -1\}，$$

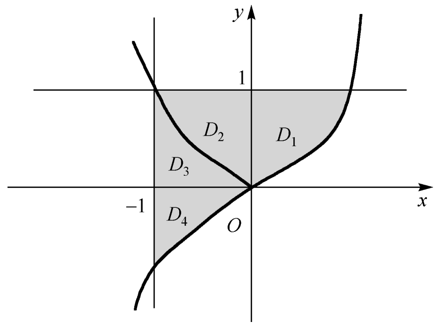


图 7.21　积分区域

因此

$$\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1+D_2} x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_3+D_4} x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma,$$

因为被积函数关于 x 为奇函数，所以

$$\iint_{D_1+D_2} x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma = 0\,,$$

而

$$\begin{aligned}\iint_{D_3+D_4} x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma &= \iint_{D_3+D_4} x\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_3+D_4} xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma \\ &= 2\iint_{D_3} x\mathrm{d}\sigma = 2\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{0}^{-x^3} x\mathrm{d}y = -\frac{2}{5}\,.\end{aligned}$$

故

$$\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma = -\frac{2}{5}\,.$$

例 7.5.7 【2011（1）】已知 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$， $f(x,1)=0$， $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a$，其中积分区域 $D:\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分

$$I_k = \iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

解　利用分部积分法

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 x\left[\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left[\int_0^1 y\mathrm{d}f'_x(x,y)\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\left[yf'_x(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\left[f'_x(x,1) - \int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 xf'_x(x,1)\mathrm{d}x - \int_0^1 x\left[\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=\int_0^1 x\mathrm{d}f(x,1)-\int_0^1\left[\int_0^1 xf_x'(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=xf(x,1)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,1)\mathrm{d}x-\int_0^1\left[\int_0^1 xf_x'(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,$$

注意到 $f(x,1)=0$，因此

$$I=-\int_0^1\left[\int_0^1 xf_x'(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=-\int_0^1\left[\int_0^1 x\mathrm{d}f(x,y)\right]\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^1\left[xf(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^1\left[f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a.$$

注：本题显然无法直接求积分 $\iint\limits_D xyf_{xy}''(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，因为题目中并未涉及 $f_{xy}''(x,y)$，如何转化 $f_{xy}''(x,y)$ 是问题求解的关键. 这里需要使用分部积分法进行求解，需要读者熟悉掌握偏导数凑微分的技巧.

例 7.5.8　【2010（2）】计算二重积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，其中

$$D=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant r\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}.$$

解　如图 7.22 所示，设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则积分区域可表示为

$$D=\{(x,\ y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\},$$

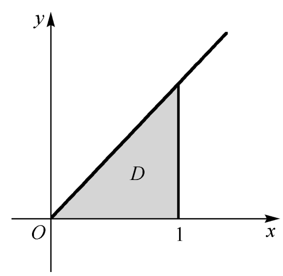


图 7.22　积分区域

所以

$$I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}(y^2)\quad=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^1\left[(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=0}^{y=x}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x.$$

这里的 $\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$ 不方便计算，采用三角替换，令 $x=\sin\theta$，则有

$$\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+2\cos 2\theta+\cos^2(2\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{16},$$

因此

$$I=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}.$$

注：积分以极坐标系的形式给出，但是从积分区域的特点来看，采用直角坐标系求解相对简单.

例 7.5.9 【2008（3）】计算 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,\ y)|0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

解　被积函数可以整理为

$$\max(xy,1)=\begin{cases}xy, & xy\geqslant 1,\\ 1, & xy<1,\end{cases}$$

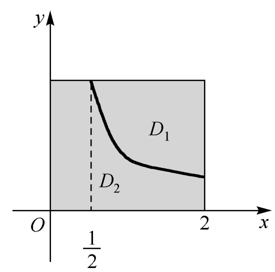


图 7.23　积分区域

曲线 $xy=1$ 将积分区域 D 分成了两个部分，如图 7.23 所示.其中

$$D_1=\{(x,y)|xy\geqslant 1,(x,y)\in D\},\quad D_2=\{(x,y)|xy<1,(x,y)\in D\},$$

因此

$$\text{原式}=\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^2 xy\mathrm{d}y+\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^2\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{15}{4}-\ln 2+1+2\ln 2=\frac{19}{4}+\ln 2.$$

第 8 章　无 穷 级 数

8.1　知 识 要 点

8.1.1　无穷级数的概念

若 $u_n(n=1,2,\cdots)$ 为常数，则称

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

为**常数项无穷级数**，简称**级数**，u_n 称为**通项**或**一般项**．$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的**前 n 项部分和**，数列 $\{S_n\}$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的**部分和数列**，若 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛**，S 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的**和**，如果极限 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 不存在，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散．

当级数收敛时，其部分和 S_n 是级数的和 S 的近似值，称 $R_n=S-S_n$ 为级数的**余项**，即

$$R_n=S-S_n=u_{n+1}+n_{n+2}+\cdots,$$

余项的绝对值 $|R_n|$ 就是用 S_n 作为 S 的近似值所产生的误差．

8.1.2　无穷级数的性质

（1）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，c 为任一常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$ 也收敛，且有 $\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=c\sum_{n=1}^{\infty}u_n$；当 $c\neq 0$ 时，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$ 也发散．

（2）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 均收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n\ .$$

（3）在一个级数中加上、去掉或改变有限项，级数的敛散性不变（在收敛的情况下，级数的和一般会改变）．

（4）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则对这个级数的项任意添加括号后所成的级数仍然收敛，且其和不变，反之则不一定成立．

（5）（**级数收敛的必要条件**）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$．

8.1.3　常见级数的敛散性

（1）几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$，当 $|q|<1$ 时，级数收敛，且级数的和为 $\dfrac{a}{1-q}$，当 $|q|\geqslant 1$，级数发散.

（2） p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} = 1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \cdots + \dfrac{1}{n^p} + \cdots$，当 $p>1$ 时，级数收敛，当 $p\leqslant 1$ 时，级数发散.

（3）$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^p n} = \dfrac{1}{2\ln^p 2} + \dfrac{1}{3\ln^p 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\ln^p n} + \cdots$，当 $p>1$ 时，级数收敛，当 $p\leqslant 1$ 时，级数发散.

8.1.4　正项级数敛散性的判别法

1．收敛的充分必要条件

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 数列 $\{S_n\}$ 有上界.

2．比较判别法

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的通项满足关系式 $u_n \leqslant cv_n$，其中 c 为大于零的常数. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

3．比较判别法的极限形式

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$，

①当 $0<l<+\infty$ 时，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 敛散性相同；

②当 $l=0$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散；

③当 $l=+\infty$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

4．比值判别法（达朗贝尔判别法）

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，则当 $\rho<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；当 $\rho>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；当 $\rho=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛，也可能发散，判别法失效.

5．根值判别法（柯西判别法）

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，且有$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则当$\rho<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当$\rho>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散；当$\rho=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$可能收敛，也可能发散，判别法失效．

8.1.5　任意项级数的敛散性

1．交错级数的收敛性判断（莱布尼茨判别法）

设交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n\geqslant 0)$满足条件：

（1）$u_n\geqslant u_{n+1}, n=1,2,3,\cdots$；（2）$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，

则交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛，且其和$S\leqslant u_1$．

2．任意项级数的条件收敛与绝对收敛

对于任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，如果$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为**绝对收敛**．如果$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为**条件收敛**．若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛，反之不一定成立．

8.1.6　函数项级数的概念

设$u_n(x)\ (n=1,2,\cdots,)$为定义在区间I上的函数，则称

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

为区间I上的**函数项级数**，若$x_0\in I$，常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛，则称$x_0$为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的**收敛点**，否则称为**发散点**．所有收敛点的集合称为**收敛域**，所有发散点的集合称为**发散域**．在收敛域上，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的和是$x$的函数，记为$S(x)$，通常称$S(x)$为函数项级数的**和函数**，该函数的定义域即为级数的收敛域，因此在收敛域内有

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots.$$

若记$S_n(x)$为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的前$n$项部分和，即$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$，则在收敛域内有$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$．

8.1.7　幂级数的概念

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称为在 x_0 点处的**幂级数**，其中 a_n $(n=0,1,\cdots)$ 称为**幂级数的系数**，该形式称为幂级数的一般形式．当 $x_0=0$ 时，幂级数化为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ，该形式称为幂级数的标准形式．

阿贝尔（Abel）定理　如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0 (x_0 \neq 0)$ 处收敛，则在满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切 x 处幂级数绝对收敛；反之，如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0$ 处发散，则在满足不等式 $|x|>|x_0|$ 的一切 x 处幂级数发散．

由 Abel 定理可知，若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x 轴的正半轴上同时存在收敛点和发散点，则一定存在一个正数 R ，使得 $|x|<R$ 时，级数绝对收敛； $|x|>R$ 时，级数发散； $x=R$ 或 $x=-R$ 级数可能收敛，也可能发散．这里的 R 称为幂级数的**收敛半径**．若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅在 $x=0$ 处收敛，则收敛半径 $R=0$ ，若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在整个实数域上收敛， $R=+\infty$ ．

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a_n \neq 0)$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则级数的收敛半径为

$$R=\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty, \\ +\infty, & \rho=0, \\ 0, & \rho=+\infty. \end{cases}$$

对于幂级数的一般形式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ，级数在开区间 (x_0-R, x_0+R) 内绝对收敛，在两个端点 $x=x_0 \pm R$ 上可能收敛也可能发散，在 $[x_0-R, x_0+R]$ 之外发散．

8.1.8　幂级数的和函数的性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 I ，收敛半径为 R ，和函数为 $S(x)$ ，则

（1） $S(x)$ 在收敛域 I 上连续；

（2） $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内可导，且有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{，}$$

即幂级数可以逐项求导数，新得到的幂级数的收敛半径仍为 R，但在端点处的收敛性可能会变化；

（3）$S(x)$ 在 I 上可积，且有

$$\int_{x_0}^{x} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x} a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

即幂级数可以逐项积分，新得到的幂级数的收敛半径仍为 R，但在端点处的收敛性可能会变化.

8.1.9　函数的幂级数展开

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有任意阶导数，则 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在该邻域内收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0,$$

其中 $R_n(x)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒余项，即 $R_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，其中 ξ 在 x 与 x_0 之间.

8.1.10　常见的麦克劳林公式

（1）$\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$，　$x\in(-1,1)$；

（2）$\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，　$x\in(-\infty,+\infty)$；

（3）$\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，　$x\in(-\infty,+\infty)$；

（4）$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$，　$x\in(-\infty,+\infty)$；

（5）$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，　$x\in(-1,1]$；

（6）$(1+x)^{\alpha}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$，　$x\in(-1,1)$.

8.2　典型例题分析

8.2.1　题型一：利用定义与性质判断级数的敛散性

例 8.2.1　判断级数 $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$ 是否收敛.

解　由于级数的前 n 项和

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)} \\
&= \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{5(5n+1)}\ ,
\end{aligned}
$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{5}<+\infty$，因此，级数收敛.

注：用定义判别级数是否收敛，即判别级数的前 n 项分和数列 $\{S_n\}$ 是否有极限．本题中，$u_n=\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$ 可写成两项之差 $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5n+1}$，从而 S_n 中能消去中间各项，剩下首尾项，进而容易判定 S_n 的极限是否存在．将通项拆成两项之差，以求得部分和的方法称为拆项法.

例 8.2.2　判断级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$ 的敛散性，如果收敛并求和.

解　级数的前 $2n$ 项之和

$$
\begin{aligned}
S_{2n} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right) \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2\cdot 3^n}\ ,
\end{aligned}
$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=\frac{3}{2}$，又因为

$$
\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-u_{2n})=\lim_{n\to\infty} S_{2n}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{3}{2}-0=\frac{3}{2}\ ,
$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{3}{2}$，于是级数收敛，且级数的和 $S=\frac{3}{2}$.

注：S_n 的求解经常会涉及 n 为偶数或奇数的讨论．这时可以先求出 S_{2n}，进而求出 S_{2n-1}，当且仅当 S_{2n} 与 S_{2n-1} 极限均存在且相等时，S_n 的极限才存在，此时级数和 S 即可求出.

例 8.2.3　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ 的敛散性.

解　设 $u_n=\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=1\neq 0$，根据级数收敛的必要条件可知，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ 发散.

注：通常可以利用级数收敛的必要条件证明级数发散.

8.2.2　题型二：判断正项级数的敛散性

例 8.2.4　判断下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；　（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+n^2}{1+n^3}$；　（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

解　（1）由于 $\sin\dfrac{\pi}{2^n}<\dfrac{\pi}{2^n}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{2^n}$ 为等比级数，且公比为 $q=\dfrac{1}{2}<1$，从而收敛，根据正项级数的比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ 收敛；

（2）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=1$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 具有相同的敛散性，而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散.

（3）因为

$$\frac{1+n^2}{1+n^3}\geqslant\frac{1+n^2}{n+n^3}=\frac{1}{n},$$

而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，根据比较判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+n^2}{1+n^3}$ 发散.

（4）使用正项级数的比值判别法，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$ 收敛.

例 8.2.5　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$ 的敛散性，其中，$a_n\to a\,(n\to\infty)$，a_n，a，b 均为正数，且 $a\neq b$.

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{a_n}=\frac{b}{a},$$

故若 $b<a$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$ 收敛；若 $b>a$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$ 发散.

8.2.3　题型三：判断任意项级数的敛散性

例 8.2.6　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$ 的敛散性（常数 $a>0$）.

解　因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{a}{n}}{\frac{a^2}{2n^2}}=1$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{2n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$ 绝对收敛.

例 8.2.7　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\pi}{1+n^2}$ 的敛散性.

解　级数的通项为

$$u_n=\frac{n\cos n\pi}{1+n^2}=(-1)^n\frac{n}{1+n^2},$$

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{1+n^2}}{\frac{1}{n}}=1$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，根据正项级数比较判别法的极限形式知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$ 发散．又因为原级数为交错级数，且满足

$$\frac{n}{1+n^2}>\frac{n+1}{1+(1+n)^2},\quad \lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

由莱布尼茨判别法可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\pi}{1+n^2}$ 收敛，且为条件收敛.

例 8.2.8　【2012（3）】已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则（　　）.

（A）$0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$　　（C）$1<\alpha\leqslant\frac{3}{2}$　　（D）$\frac{3}{2}<\alpha<2$

解　由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，可知 $0<2-\alpha\leqslant 1$，即 $1\leqslant\alpha<2$．又因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛，而当 $n\to\infty$ 时，

$$\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\sim\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}},$$

因此 $\alpha-\frac{1}{2}>1$ 时，即 $\alpha>\frac{3}{2}$，综上可知 $\frac{3}{2}<\alpha<2$，从而选项 D 正确.

例 8.2.9　【2015（3）】下列级数中发散的是（　　）.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$　　（C）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}$　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

解　利用反证法．假设$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}$收敛，由莱布尼茨判别法易知$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$收敛，根据级数的性质可知，级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$$

收敛．事实上，由$\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{\ln n}$，而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散.由正项级数比较判别法知，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$发散，矛盾．从而级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}$发散．故选 C．

例 8.2.10　证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$绝对收敛，并求其和．

证　记$u_n=(-1)^{n-1}\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n+1}{2^n}}{\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}}=\frac{1}{2}<1,$$

由达朗贝尔比值判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$收敛，从而原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$绝对收敛.

下面求该级数的和．令

$$S_n=1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{8}-\frac{7}{16}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n},$$

两式相加得

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}S_n&=1+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}+\frac{5}{8}-\frac{7}{8}-\frac{7}{16}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n}\\&=1-1+\frac{2}{4}-\frac{2}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2}{2^{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n}\\&=\frac{\dfrac{1}{2}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n}\\&=\frac{1}{3}+(-1)^{n-1}\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n}\\&=\frac{1}{3}+(-1)^{n-1}\frac{6n+1}{3\cdot 2^n},\end{aligned}$$

因此

$$S_n = \frac{2}{9} + (-1)^{n-1}\frac{6n+1}{9\cdot 2^{n-1}},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{9} + (-1)^{n-1}\frac{6n+1}{9\cdot 2^{n-1}}\right] = \frac{2}{9},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}} = \frac{2}{9}.$$

8.2.4　题型四：函数项级数收敛域的求解

例 8.2.11　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$ 的收敛域.

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\ln x)^{n+1}}{(\ln x)^n}\right| = |\ln x|,$$

所以当 $|\ln x|<1$，即 $\frac{1}{\mathrm{e}}<x<\mathrm{e}$ 时，级数绝对收敛；当 $|\ln x|>1$，即 $x>\mathrm{e}$ 或 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，级数发散；当 $x=\mathrm{e}$，级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$，当 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$，根据级数收敛的必要条件可知，级数发散．故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$ 的收敛域是 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right)$.

例 8.2.12　试求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域.

解　记 $u_n(x)=\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}}{\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n}\right| = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|,$$

当 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$，即 $x>0$ 时，级数绝对收敛；当 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1$，即 $x<0$ 时，级数发散；当 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|=1$，即 $x=0$ 时，级数化为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$，由莱布尼茨定理可知，级数收敛，因此原级数的收敛域为 $[0,+\infty)$.

8.2.5　题型五：讨论幂级数的收敛半径及收敛域

例 8.2.13　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径及收敛域.

解　因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1,$$

所以级数的收敛半径 $R=1$.

当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛；当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以收敛半径为 1，收敛域为 $(-1,1]$.

例 8.2.14　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(x-2)^n$ 的收敛域.

解　作变换 $x-2=t$ ，所给级数化为关于 t 的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}t^n$ ．因为

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}t^n$ 的收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=1$.

当 $t=1$ 时，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ ，由 p 级数的性质可知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

当 $t=-1$ 时，级数化为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ，由交错级数判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛．从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}t^n$ 的收敛域为 $-1\leqslant t<1$ ，解得 $1\leqslant x<3$ ，得到原级数的收敛域为 $[1,3)$.

例 8.2.15　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n[3^n+(-2)^n]}$ 的收敛域.

解　因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{[3^n+(-2)^n]n}{[3^{n+1}+(-2)^{n+1}](n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]n}{3\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right](n+1)}=\frac{1}{3},$$

所以级数的收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=3$ ．当 $x=3$ 时，因为原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$ ，注意到

$$\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}>\frac{3^n}{3^n+3^n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2n},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$ 发散；当 $x=-3$ 时，原级数化为

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\frac{(-3)^n}{n}$，注意到

$$\frac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{(-3)^n+2^n-2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{(-3)^n+2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}-\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=(-1)^n\frac{1}{n}-\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n},$$

显然交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$收敛．下面考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}$的敛散性，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}}{\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\cdot\frac{2n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{3-2\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\cdot\frac{2n}{n+1}=\frac{2}{3}<1,$$

故由比值判别法可知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}$收敛，因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n[3^n+(-2)^n]}$的收敛域为$[-3,3)$．

例 8.2.16　【2011（1）】设数列$\{a_n\}$单调递减，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\,(n=1,2,\cdots)$无界，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$的收敛域为（　　）．

（A）$(-1,1]$　　（B）$[-1,1)$　　（C）$[0,2)$　　（D）$(0,2]$

解　幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$的收敛域一定关于$x=1$对称，因此选项 A 和 B 均错误；因为$\{a_n\}$单调递减，且$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，所以$a_n>0$，由交错级数的莱布尼茨法则可知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛，故$x=0$为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$的收敛点，因此选项 D 错误，从而答案选 C．

例 8.2.17　求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n+b^n}x^n$的收敛域，其中$a,b$均为大于 0 的常数．

解　记$a_n=\frac{1}{a^n+b^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}{a\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right]}=\dfrac{1}{a}, & a>b\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a^n}{2a^{n+1}}=\dfrac{1}{a}, & a=b\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}+1\right]b}=\dfrac{1}{b}, & a<b\end{cases}$$

所以幂级数的收敛半径

$$R=\begin{cases}a, & a\geqslant b,\\ b, & a<b.\end{cases}$$

当 $x=R$ 时，若 $a\geqslant b$，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{a^n+b^n}$，而 $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+b^n}=1$，由级数收敛的必要条件可知，级数发散；若 $a<b$，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{a^n+b^n}$，级数发散，故当 $x=R$ 时，级数发散. 类似方法可以证明，当 $x=-R$ 时，级数发散.

综上所述，当 $a\geqslant b$ 时，幂级数的收敛域为 $(-a,a)$；当 $a<b$ 时，收敛域为 $(-b,b)$.

注：本题中幂级数的收敛半径也可以表示为 $R=\max\{a,b\}$.

8.2.6　题型六：求幂级数的和函数

例 8.2.18　求 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的收敛域及和函数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的和.

解　由于

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1,$$

级数的收敛半径 $R=1$，在端点 $x=1$ 处，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}n$，由于级数的一般项不趋于 0，因此级数发散；在 $x=-1$ 处，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n-1}$，由于级数的一般项不趋于 0，因此级数发散，故幂级数的收敛域为 $(-1,1)$.

设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的和函数为 $S(x)$，即 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},x\in(-1,1)$，积分得

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right]\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},$$

上式两边对 x 求导得

$$S(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^x S(x)\mathrm{d}x\right]=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1).$$

又因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},x\in(-1,1),$$

取 $x=\frac{1}{2}$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=4.$$

例 8.2.19　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数.

解　由于

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2},$$

因此级数的收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=2$.

当 $x=2$ 时，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$，级数发散；当 $x=-2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$，级数收敛．故幂级数的收敛域为 $[-2,2)$.

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}$，则 $x\cdot S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$，由于

$$\left[x\cdot S(x)\right]'=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]'=\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]'=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2-x},$$

两边积分得

$$x\cdot S(x)=-\ln(2-x)+\ln 2 .$$

当 $x\neq 0$ 时，$S(x)=-\frac{\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)}{x}$；当 $x=0$ 时，$S(0)=\frac{1}{2}$，所以幂级数的和函数为

$$S(x)=\begin{cases}-\dfrac{\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)}{x}, & x\in[-2,0)\cup(0,2),\\ \dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

例 8.2.20　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$.

解　设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n},$$

其中

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},\quad(-1,1) .$$

下面求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$ 的和函数，记

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1} .$$

由于

$$[xg(x)]' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2},$$

因此

$$xg(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t = -x + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

又由于 $g(0)=0$，故

$$g(x) = \begin{cases} -1 + \dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & -1<x<1, x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

所以

$$S(x) = g(x) - \frac{x^2}{1-x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}, & -1<x<1, x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

注：由几何级数的和函数公式 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}(|x|<1)$ 出发，经过逐项求导、逐项积分、换元以及加减法等运算，可以求出某些幂级数的和函数. 需要注意的是，通过逐项求导、逐项积分后得到幂级数，其收敛半径不变，但收敛域可能变化，即新得到的幂级数在端点处的收敛性可能会变化.

例 8.2.21 【2010（1）】求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

解 记 $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{(n+1)-1}}{2(n+1)-1}x^{2(n+1)}}{\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}x^2 = x^2,$$

则当 $-1<x<1$ 时级数收敛. 当 $x=\pm 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，该级数为交错级数，由莱布尼茨判别法可知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

设幂级数的和函数为 $S(x)$，则

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n} = x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}.$$

记 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，则 $g(0)=0$. 由于

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2},$$

故

$$g(x)=\int_0^x g'(x)\mathrm{d}x+g(0)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x,$$

所以

$$S(x)=xg(x)=x\arctan x,\quad x\in[-1,1].$$

例 8.2.22　求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$ 的和.

解　记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，由于

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1})\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},|x|<1,$$

因此

$$S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1).$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=4.$$

注：本题中把级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 视为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=x_0$ 时所得的数项级数，通过求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$，可得 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S(x_0)$，这是求解常数项级数的和的常用方法.

8.2.7　题型七：函数展开成幂级数问题

例 8.2.23　将 $f(x)=(1+x)\mathrm{e}^x$ 展成 x 的幂级数.

解法 1　由于 $f(x)=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x$，而 $\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$， $x\in(-\infty,+\infty)$，

所以

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

解法 2　注意到 $(x\mathrm{e}^x)'=(1+x)\mathrm{e}^x$，而 $\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$， $x\in(-\infty,+\infty)$，

所以

$$xe^x = x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1},$$

两端求导数得

$$f(x)=e^x+xe^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 8.2.24　将 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数，并求收敛域.

解　函数整理得

$$f(x)=\frac{1}{3+(x-3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{x-3}{3}\right)},$$

因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x},\qquad x\in(-1,1),$$

所以

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{x-3}{3}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x-3}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n,$$

且 $-1<\dfrac{x-3}{3}<1$ ，即 $0<x<6$，故

$$\frac{1}{x}==\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n,\quad x\in(0,6).$$

例 8.2.25　将函数 $f(x)=\sin x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处展开成泰勒级数.

解　当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，

$$\begin{aligned}\sin x&=\sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right],\end{aligned}$$

而

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}=1-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4-\cdots,$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5-\cdots,$$

所以

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{5}\right)^5-\cdots\right],\ x\in(-\infty,+\infty).$$

8.2.8　题型八：无穷级数的应用问题

例 8.2.26　设某人在银行存款 A 元，假定银行存款的年利率为常数 a，依复利计算，如果他要在第一年末提取 1 元，在第二年末提取 4 元，…，在第 n 年提取 n^2 元，并且他希望永远如此提取，问他至少需要事先存入多少本金？

解　设 A_n 是为了保证第 n 年末提取 n^2 元所存入 n 年的本金，那么这部分本金第 n 年末的本利和为 $A_n(1+a)^n$，于是有 $A_n(1+a)^n=n^2$，得

$$A_n=\frac{n^2}{(1+a)^n},\quad n=1,2,\cdots,$$

从而，需要事先存入的本金至少为

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+a)^n}=\frac{1}{1+a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+a)^{n-1}}.$$

设 $S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的和函数，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$，容易求得幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的收敛域为 $(-1,1)$．由于

$$\begin{aligned}\int_0^x S(x)\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2x^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\cdot\left(\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\mathrm{d}x\right)'\\&=x\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x\right)'=x\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'\\&=x\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},\end{aligned}$$

因此

$$S(x)=\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'=\frac{1+x}{(1-x)^3},$$

从而

$$A=\frac{1}{1+a}S\left(\frac{1}{1+a}\right)=\frac{1}{1+a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+a)^{n-1}}=\frac{(1+a)(2+a)}{a^3}.$$

8.3　深 化 训 练

8.3.1　单项选择题

（1）【2006（3）】若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数（　　）．

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛

（2）【2009（1）】设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则（　　）.

（A）当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 收敛

（B）当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 发散

（C）当 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 b_n^2$ 收敛

（D）当 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 b_n^2$ 发散

8.3.2　判别下列正项级数是否收敛：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$；　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot n!}{n^n}$；　（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$；　（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\sin^2\frac{n}{3}\pi}{2^n}$.

8.3.3　判别下列数项级数是否收敛，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛：

（1）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$；　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$；　（3）$\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$.

8.3.4　已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性，若收敛求其和.

8.3.5　设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，试证明对于任意的 $p>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^p}$ 收敛.

8.3.6　求下列幂级数的收敛域：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$；　（2）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$；　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(x-2)^n$.

8.3.7　求下列幂级数的收敛域及和函数：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$；　（2）【2006（3）】$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$.

8.3.8　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的和函数，并求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$ 的和.

8.3.9　求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

8.3.10　【2008（3）】设某银行存款的年利率为 $r=0.05$，并依年复利计算，某基金会通过存款 A 万元实现第一年提取 19 万元，第二年提取 28 万元，…，第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元，

并能按此规律已知提取下去，问 A 至少应为多少万元？

8.3.11　将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

8.3.12　将下列函数展开成 x 的幂级数：

（1）$f(x)=\dfrac{x}{3+x}$；　（2）$f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$；　（3）$f(x)=\ln(5+x)$；

（4）$f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x-3}$；（5）$f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$.

8.3.13　将下列函数展开成 $x-2$ 的幂级数：

（1）$f(x)=\dfrac{1}{5-x}$；　（2）$f(x)=\ln x$.

8.4　深化训练详解

8.3.1　单项选择题

（1）D；**提示**　由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则该级数去掉第一项得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 也收敛，又收敛级数乘以常数 $\dfrac{1}{2}$ 后当然也收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{2}$ 也收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.

（2）C；**提示**　选项 A 错误，例如取 $a_n=b_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$；选项 B 和选项 D 错误，例如取 $a_n=b_n=\dfrac{1}{n}$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 可知，数列 $\{a_n\}$ 有界；由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛可知，$\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=0$，即 $|b_n|$ 也有界．因此存在常数 $M>0$，使得

$$0\leqslant a_n^2b_n^2=a_n^2\cdot|b_n|\cdot|b_n|\leqslant M\cdot|b_n|,$$

根据比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 收敛，因此选项 C 正确.

8.3.2　（1）由于

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\frac{1}{2\sqrt{n+1}},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ 发散，由比较判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 发散.

（2）由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}<1,$$

由比值判别法可知，级数收敛.

（3）当$0<a<1$时，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a^n}=1\neq 0$，所以由级数收敛的必要条件知级数发散；当$a>1$时，由于

$$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n},$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^n}$收敛，由比较判别法可知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$收敛.

（4）由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,$$

由比值判别法可知，级数收敛.

（5）由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}<1,$$

由比值判别法可知，级数收敛.

（6）因为$\sin^2\dfrac{n}{3}\pi\leqslant 1$，因此

$$\frac{n\cdot\sin^2\dfrac{n}{3}\pi}{2^n}\leqslant\frac{n}{2^n}.$$

记$u_n=\dfrac{n}{2^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n+1}{2^{n+1}}}{\dfrac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}<1,$$

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$收敛，由正项级数的比较判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot\sin^2\dfrac{n}{3}\pi}{2^n}$收敛.

8.3.3　（1）因为

$$0<n-\ln n<n,\quad \frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n},$$

由比较判别法可知，级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}\right|$发散．记

$$f(x)=\frac{1}{x-\ln x},\quad x>1.$$

由于

$$f'(x)=\frac{-\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2}<0,$$

因此 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递减，从而数列 $\left\{\frac{1}{n-\ln n}\right\}$ 单调递减．又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{\ln x}{x}}=\frac{0}{1-0}=0,$$

所以根据莱布尼茨判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 条件收敛.

（2）因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，根据正项级数比值判别法的极限形式知， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}\right|$ 发散．又因为原级数为交错级数，且满足

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right),\quad \lim_{n\to\infty}u_n=0,$$

根据莱布尼茨判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 收敛，且为条件收敛.

（3）由于

$$\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)=(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n},$$

故级数为交错级数．又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}}=\infty$，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)\right|$ 发散．而原级数为交错级数，且满足

$$u_n=\sin\frac{1}{\ln n}>\sin\frac{1}{\ln(n+1)}=u_{n+1},\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\ln n}=0,$$

根据莱布尼茨判别法知，原级数收敛，且为条件收敛.

8.3.4　因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 存在，所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}[2a_{2n-1}-(-1)^{n-1}a_n]$$

收敛，且又因为$\sum_{n=1}^{\infty}2a_{2n-1}=10$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}[2a_{2n-1}-(-1)^{n-1}a_n]=8.$$

8.3.5 令$t=\tan x$，由于

$$\mathrm{d}t=\mathrm{d}\tan x=\sec^2 x\mathrm{d}x=(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x,$$

因此$\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$．从而

$$0<a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n},$$

故对于任意的正数p，有

$$\frac{a_n}{n^p}<\frac{1}{n^{p+1}},$$

由正项级数的比较判别法可知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^p}$收敛.

8.3.6 （1）由于

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

因此级数的收敛半径$R=1$．当$x=1$时，幂级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，这是调和级数，级数发散．当$x=-1$时，幂级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$，由莱布尼茨判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$收敛．因此，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n$的收敛区域为$[-1,1)$.

（2）**解法 1** 令$t=x^2$，从而$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{(2n)!}$．由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(2n+2)!}}{\dfrac{1}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=0,$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{(2n)!}$的收敛半径为$R=+\infty$，由$|x^2|<+\infty$，解得$|x|<+\infty$，从而原级数收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

解法 2 记$u_n(x)=\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$，由于对任意的$x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}\cdot(2n)!}{x^{2n}\cdot[2(n+1)]!}\right|=x^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=0,$$

由比值判别法可知，级数均收敛，故级数收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

（3）做变换 $t=x-2$，所给级数化为 t 的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}t^n$，由于

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1,$$

所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}t^n$ 的收敛半径 $R=\frac{1}{l}=1$. 当 $t=1$ 时,级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，级数发散. 当 $t=-1$ 时，级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，这是一个交错级数，由莱布尼茨判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}t^n$ 的收敛域为 $-1\leqslant t<1$，把 $x-2=t$ 回代，得到原级数的收敛域为 $[1,3)$.

8.3.7 （1）因为

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+1}(2n-1)}{x^{2n-1}(2n+1)}\right|=x^2,$$

故当 $x^2<1$，即 $-1<x<1$ 时，原幂级数绝对收敛；当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$，由莱布尼茨判别法可知，该级数收敛；当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-1}$，由交错级数判别法知，级数收敛. 因此幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

设幂级数的和函数为 $S(x)$，即 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，对幂级数逐项求导，有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2},$$

上式积分得

$$S(x)-S(0)=\int_0^x S'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x,$$

因此级数的和函数为

$$S(x)=\arctan x,\quad x\in[-1,1].$$

（2）因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}\cdot n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)x^{2n+1}}\right|=x^2,$$

所以当 $x^2<1$，即 $-1<x<1$ 时，原幂级数绝对收敛；当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ 级数收敛；当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$，级数收敛. 因此幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

下面求幂级数的和函数 $S(x)$，由于

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}=xg(x),$$

其中 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$．当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2nx^{2n-1}}{n(2n-1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)},$$

$$g''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{2}{1+x^2},$$

且 $g'(0)=0,g(0)=0$，所以

$$g'(x)=\int_0^x g''(t)\mathrm{d}t+g'(0)=\int_0^x\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\arctan x,$$

$$g(x)=\int_0^x g'(t)\mathrm{d}t+g(0)=2\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t=2\left(t\arctan t\Big|_0^x-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t\right),$$

$$=2x\arctan x-\ln(1+x^2),$$

从而

$$S(x)=xg(x)=2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2),\quad x\in[-1,1].$$

8.3.8　容易求得幂级数的收敛区间为 $(-1,1)$，设幂级数的和函数为 $S(x)$，由于 $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+1)x^n\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\dfrac{x}{1-x}$，

因此

$$S(x)=\left[\int_0^x S(x)\mathrm{d}x\right]'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1).$$

且

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=4.$$

8.3.9　根据级数的性质，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

其中

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

下面求级数$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$的和．设$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, x\in(-1,1)$，则

$$\int_0^x\left[\int_0^x S(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}x^n=\frac{x^2}{1-x}.$$

连续对上式求两次导数得

$$S(x)=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3}, \quad x\in(-1,1).$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0+0+S\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{16}{27}.$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\frac{16}{27}+\frac{2}{3}=\frac{34}{27}.$$

8.3.10　设A_n是为了保证第n年末提取$(10+9n)$万元所存入n年的本金，那么这部分本金第n年末的本利和为$A_n(1+r)^n$，于是有$A_n(1+r)^n=10+9n$，得

$$A_n=\frac{10+9n}{(1+r)^n}, \quad n=1,2,\cdots,$$

从而，需要事先存入的本金至少为

$$\begin{aligned}A&=\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+9n}{(1+r)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{(1+r)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9n}{(1+r)^n}\\&=10\times\frac{\frac{1}{1+r}}{1-\frac{1}{1+r}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9n}{(1+r)^n}\\&=200+\frac{9}{1+r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+r)^{n-1}}.\end{aligned}$$

设$S(x)$为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$的和函数，即$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，容易求得幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$的收敛域为$(-1,1)$．由于

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},$$

所以

$$S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}, \quad x\in(-1,1).$$

从而

$$A = 200 + \frac{9}{1+r} S\left(\frac{1}{1+r}\right) = 200 + 3780 = 3980 \text{（万元）}.$$

8.3.11　因

$$f'(x) = -\frac{2}{1+4x^2} = -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n}\ ,\quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\ ,$$

且 $f(0) = \frac{\pi}{4}$，逐项积分得

$$f(x) - f(0) = -2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n 4^n t^{2n}\mathrm{d}t = -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}\ ,$$

整理得

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}\ ,\quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\ .$$

因为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处连续，所以上式右端幂级数在 $x = \frac{1}{2}$ 处收敛．所以

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}\ ,\quad -\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{2}\ .$$

在上述展开式中令 $x = \frac{1}{2}$，解得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$．

8.3.12　（1）由于 $f(x) = \frac{x}{3+x} = \frac{x}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}}$，而

$$\frac{1}{1+\frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}x^n\ ,$$

因此

$$f(x) = \frac{x}{3+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}x^{n+1}\ ,\quad x \in (-3, 3)\ .$$

（2）因为 $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，　$x \in (-\infty, +\infty)$，所以

$$\sin\frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+1)!}x^{2n+1}\ ,\quad x \in (-\infty, +\infty)\ .$$

（3）由于

$$f(x) = \ln(5+x) = \ln\left[5\left(1+\frac{x}{5}\right)\right] = \ln 5 + \ln\left(1+\frac{x}{5}\right),$$

而 $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$，　$|x| < 1$，可得

$$\ln(1+x)=\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \quad x\in(-1,1].$$

因此

$$f(x)=\ln 5+\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)=\ln 5+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{5}\right)^n, \quad x\in(-5,5].$$

（4）由于

$$\frac{1}{2x^2-3x+1}=\frac{1}{(2x-1)(x-1)}=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x-1}\right)=\left(\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}\right),$$

且

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad \frac{2}{1-2x}=2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n,$$

所以

$$\frac{1}{2x^2-3x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)x^n, \quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

从而

$$\frac{x}{2x^2-3x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)x^n, \quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

（5）由于

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln[(1+x)(1+x^2)]=\ln(1+x)+\ln(1+x^2),$$

且

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \quad \ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n},$$

故

$$\ln(1+x)+\ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}x^{2n}, \quad x\in(-1,1).$$

8.3.13　（1）$f(x)=\dfrac{1}{5-x}=\dfrac{1}{3-(x-2)}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\dfrac{x-2}{3}}=\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}(x-2)^n, \quad x\in(-1,5).$$

（2）$f(x)=\ln(2+x-2)=\ln\left[2\left(1+\dfrac{x-2}{2}\right)\right]=\ln 2+\ln\left(1+\dfrac{x-2}{2}\right)$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n2^n}, \quad x\in(0,4).$$

8.5　综合提高训练

例 8.5.1　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ 的敛散性.

解　由于

$$u_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}),$$

记 $v_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，则有 $u_n=v_{n+1}-v_n$. 从而

$$\begin{aligned}S_n&=u_1+u_2+\cdots u_n=(v_2-v_1)+(v_3-v_2)+\cdots+(v_{n+1}-v_n)\\&=v_{n+1}-v_1=(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{1})\\&=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1\\&=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\sqrt{2}+1,\end{aligned}$$

从而 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$，故级数收敛.

例 8.5.2　设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x, n=0,1,2\cdots$, 求 $\sum_{n=0}^{\infty}I_n$ 的和.

解　由于

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\mathrm{d}(\sin x)=\frac{1}{n+1}(\sin x)^{n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1},$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}.$$

记 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，则级数的收敛 $R=1$. 当 $x\in(-1,1)$ 时，由于

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},$$

于是

$$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t+S(0)=-\ln|1-x|,\quad x\in(-1,1).$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}=S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\ln\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\ln(2+\sqrt{2}).$$

例 8.5.3　若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，

（1）试讨论该幂级数在 $x=2$ 处的敛散性；

（2）该幂级数在 $x=4$ 处收敛性如何？

解　（1）令 $t=x-1$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n,$$

由幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛知，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ 在 $t=-2$ 处收敛，由 Abel 定理可知，对于适合不等式 $|t|<2$ 的一切 t 使该级数绝对收敛，即幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ 在区间 $(-2,2)$ 内绝对收敛；从而可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $(-1,3)$ 内绝对收敛．而 $x=2$ 是区间 $(-1,3)$ 内的点，故幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=2$ 处绝对收敛．

（2）由（1）知，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $(-1,3)$ 内绝对收敛，在 $(-1,3)$ 外部的收敛无从得知，故幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=4$ 处的收敛性不能确定．

注：Abel 定理是对形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的级数适用，而对于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 则无法直接适用．

例 8.5.4　已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R_1=1$，求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 的收敛半径 R_2．

解　由 $R_1=1$ 可知，任取 $x_0\in(-1,1)$，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0{}^n$ 绝对收敛，因此数列 $\{|a_nx_0^n|\}$ 有界，即存在正数 M，使 $|a_nx_0^n|\leqslant M$ 成立．于是对于 $\forall x\in(-\infty,\infty)$，有

$$\left|\frac{a_n}{n!}x^n\right|=\left|\frac{a_nx_0^n}{n!}\frac{x^n}{x_0^n}\right|\leqslant\frac{M}{n!\left|x_0^n\right|}\left|x^n\right|.$$

另一方面，由比值判别法可以判定级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{M}{n!\left|x_0^n\right|}\left|x^n\right|$ 对任何 x 都收敛，从而由比较判别法可知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 对任意的 $x\in R$ 也绝对收敛，即 $R_2=+\infty$．

注：若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，$\rho\in(0,+\infty)$，则收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$，该命题的逆命题不一定成立．换句话说，即使知道幂级数的收敛半径 R 存在，且 $R\in(0,+\infty)$，也不能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{R}$．例如，幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}x^n,$$

用根值判别法易知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}x^n$的收敛半径为$R=2$，但极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$不存在.

例 8.5.5　证明级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$条件收敛.

分析　显然级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$发散，所以级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$不是绝对收敛．另一方面$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$是交错级数，但又不满足莱布尼茨判别法的条件.

证　因为

$$|u_n|=\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n-1}},$$

所以由比较判别法知，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$发散．又因为

$$S_{2n}=\sum_{k=2}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+(-1)^k}}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\dots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right),$$

由于上式每个括号都小于 0，所以$\{S_{2n}\}$单调递减．再由

$$S_{2n}>\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\dots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}>-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

知$\{S_{2n}\}$单调递减有下界，故$\{S_{2n}\}$收敛，记$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$．易知$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=S+0=S.$$

所以，原级数的部分和数列$\{S_n\}$收敛，从而级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$收敛，且为条件收敛.

例 8.5.6　设$a_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x$，$n=1,2,\cdots$,试求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}$的值.

解　令$x=n\pi-t$，则

$$\begin{aligned}a_n&=-\int_{n\pi}^{0}(n\pi-t)|\sin t|\mathrm{d}t=n\pi\int_0^{n\pi}|\sin t|\mathrm{d}t-\int_0^{n\pi}t|\sin t|\mathrm{d}t\\&=n\pi\int_0^{n\pi}|\sin x|\mathrm{d}x-\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$a_n=\frac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=\frac{n^2\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=n^2\pi,\quad n=1,2,\cdots.$$

记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$， $-1<x<1$． 当 $x\in(-1,1)$ 时，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$，逐项求导，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2},$$

再次逐项求导，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\frac{1+x}{(1-x)^3},$$

从而

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3},\quad -1<x<1,$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\pi S\left(\frac{1}{2}\right)=6\pi .$$

例 8.5.7 【2014（3）】求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)}\right|=1,$$

因此级数的收敛半径 $R=1$，根据级数收敛的必要条件可知，当 $x=\pm1$ 时，级数均发散，故级数的收敛域为 $(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$，则

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)+(n+1)(n+2)]x^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'+\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''\\&=\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{3-x}{(1-x)^3},\ x\in(-1,1) .\end{aligned}$$

例 8.5.8 【2007（3）】将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛区间.

解 由于

$$f(x)=\frac{1}{x^2-3x-4}=\frac{1}{(x-4)(x+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+1}\right)$$

而

$$\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-1-3}=-\frac{1}{3-(x-1)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x-1}{3}}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}\ ,$$

上式成立的条件为：$\left|\dfrac{x-1}{3}\right|<1$，即$|x-1|<3$．又因为

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2+(x-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{-(x-1)}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-(x-1)}{2}\right]^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^{n+1}}\ ,$$

上式成立的条件为：$\left|-\left(\dfrac{x-1}{2}\right)\right|<1$，即$|x-1|<2$．因此

$$f(x)=\frac{1}{5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(x-1)^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^{n+1}}\right]=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)}{3^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](x-1)^n$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-3)^{n+1}-2^{n+1}}{6^{n+1}}\right](x-1)^n\ ,$$

且其收敛区间为$|x-1|<3$与$|x-1|<2$的交集：$|x-1|<2$，即$x\in(-1,3)$．

第 9 章　常微分方程

9.1　知 识 要 点

9.1.1　微分方程的概念

凡表示未知函数、未知函数的导数以及自变量之间关系的方程称为**微分方程**；未知函数的最高阶导数的阶数称为该方程的**阶**；未知函数为一元函数的微分方程称为**常微分方程**，未知函数为多元函数的微分方程，称为**偏微分方程**.

n阶常微分方程的一般表示形式为

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0 \quad \text{或} \quad y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}) .$$

若将函数 $y=\phi(x)$ 代入微分方程，使之成为恒等式，即

$$F(x,\phi,\phi',\phi'',\cdots,\phi^{(n)})\equiv 0 \text{ 或 } \phi^{(n)}\equiv f(x,\phi,\phi',\phi'',\cdots,\phi^{(n-1)}) ,$$

则称 $y=\phi(x)$ 是该微分方程的**解**.

若微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相等，这样的解称为**通解**或**一般解**．通解中的任意常数确定以后，就可以得到微分方程的**特解**．一般地，可以通过某些特定条件确定这些常数，这些条件通常称为**初值条件**（或**边界条件**）.

9.1.2　一阶微分方程及解法

1．可分离变量的微分方程

标准形式为：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$.

解　将变量分离到等式两端，两端同时积分即可，即

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x .$$

2．齐次微分方程

标准形式为：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 ϕ 为某个已知的函数.

解　令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=xu$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入齐次方程得：

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\phi(u)-u ,$$

化为可分离变量微分方程．分离变量后再积分得

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\phi(u)-u}=\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

求出积分后回代$u=\dfrac{y}{x}$即可.

3．一阶线性微分方程

标准形式为：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$，若$Q(x)=0$，称其为一阶线性齐次微分方程，若$Q(x)\neq 0$，称其为一阶线性非齐次微分方程.

解　利用分离变量法可以求出齐次方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$的通解：

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

利用常数变易法求解非齐次微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$的通解．设非齐次微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$的解为$y=u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$，求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-u(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x},$$

代入非齐次微分方程得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-u(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+u(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x),$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x),$$

分离变量，积分得

$$u(x)=\int \mathrm{d}u=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x,$$

因此非齐次方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$的通解为：

$$y=\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

注：一阶线性非齐次微分方程的通解中的$\int P(x)\mathrm{d}x$和$\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$分别理解为一个原函数，即不再含有任意常数.

4．伯努利方程

标准形式为：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n\quad(n\neq 0,1)$.

解　令$z=y^{1-n}$，则$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，故$y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{(1-n)}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，代入到原方程式得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)\,.$$

这是一个非齐次的一阶线性微分方程，可以用前面的方法进行求解，然后回代 $z=y^{1-n}$ 即可.

9.1.3　二阶线性微分方程

标准形式：$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$，若 $f(x)=0$，称其为二阶齐次线性微分方程，若 $f(x)\neq 0$，称其为二阶非齐次线性微分方程.

1．二阶线性微分方程的解的结构

（1）如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个解，则 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是该方程的解，其中 C_1，C_2 是任意实数.

（2）如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个线性无关的解，则 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是该方程的通解，其中 C_1，C_2 是任意实数.

注：对于区间 I 上的 n 个函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$，若存在 n 个不全为 0 的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得当 $x\in I$ 时有恒等式

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)\equiv 0\,,$$

则称 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 在区间 I 上**线性相关**，否则称为**线性无关**.

（3）如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是非齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的两个特解，那么 $y_1(x)-y_2(x)$ 是对应齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解.

（4）设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解，$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是对应的齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的通解，那么 $y(x)=y^*(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的通解.

（5）**叠加原理**　若函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 分别是微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$ 与 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$ 的解，则 $y(x)=y_1(x)+y_2(x)$ 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的解.

2．二阶常系数齐次线性微分方程

标准形式为：$y''+py'+qy=0$，其中 p 和 q 均为常数.

解　根据对应的特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根的取值情况，二阶常系数齐次线性微分方程的解的形式如表 9.1 所示.

表 9.1　二阶常系数齐次线性微分方程的解的形式

判别式	特征方程	特征根	微分方程的通解
$p^2-4q>0$	有两个不同的实根	$r_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$	$C_1\mathrm{e}^{r_1}+C_2\mathrm{e}^{r_2}$
$p^2-4q=0$	有两个相同的实根	$r_1=r_2=-\dfrac{p}{2}$	$(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{r_1}$
$p^2-4q<0$	有两个共轭的复根	$r_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$，$r_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$ $\alpha=-\dfrac{p}{2}$，$\beta=\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$	$\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

3．二阶常系数非齐次线性微分方程

标准形式为：$y''+py'+qy=f(x)$，其中 p 和 q 为常数.

解　对于非齐次线性微分方程，只需求出一个特解，再求出对应的齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解，将二者相加即可为非齐次微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的通解.

非齐次线性微分方程的右端函数类型与特征根及特解的关系如表 9.2 所示.

表 9.2　非齐次线性微分方程的右端函数类型与特征根及特解的关系

$f(x)$的类型	特征根	特解的形式
$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$	λ 不是特征方程的根	$y^*=\mathrm{e}^{\lambda x}Q_m(x)$
	λ 是特征方程的单根	$y^*=x\mathrm{e}^{\lambda x}Q_m(x)$
	λ 是特征方程的二重根	$y^*=x^2\mathrm{e}^{\lambda x}Q_m(x)$
$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x$ $+P_n(x)\sin\omega x]$	$\lambda\pm\mathrm{i}\omega$ 不是特征方程的根	$y^*=\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$
	$\lambda\pm\mathrm{i}\omega$ 是特征方程的共轭复根	$y^*=x\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$

这里 $P_m(x)$ 为已知的 m 次多项式，$Q_m(x)$ 为待定的 m 次多项式；$P_l(x)$ 为已知的 l 次多项式，$P_n(x)$ 为已知的 n 次多项式，$R_m^{(1)}(x)$，$R_m^{(2)}(x)$ 为两个待定的 m 次多项式，$m=\max\{l,n\}$.

9.2　典型例题分析

9.2.1　题型一：分离变量法求解微分方程

例 9.2.1　用分离变量法求解下列微分方程：

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2y^2$；　（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}$；　（3）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+x+x^2)y$，且 $y(0)=\mathrm{e}$.

解　（1）若 $y=0$，方程显然成立. 当 $y\neq0$ 时，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2}=x^2\mathrm{d}x$，两边积分得 $\displaystyle\int\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=\int x^2\mathrm{d}x$，即有

$$-\frac{1}{y}=\frac{x^3}{3}+\frac{C}{3},$$

从而通解为 $y=-\dfrac{3}{x^3+C}$ 及 $y=0$，其中 C 为任意实数.

（2）若 $y=0$，方程显然成立. 当 $y\neq0$ 时，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$，两边积分

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x,$$

求积分得 $\ln|y|=\arcsin x+C_1$，即

$$y=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{\arcsin x}=C\mathrm{e}^{\arcsin x},$$

从而方程的通解为 $y=C\mathrm{e}^{\arcsin x}$，其中 C 为任意实数.

（3）若 $y=0$，方程显然成立．当 $y\neq 0$ 时，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=(1+x+x^2)\mathrm{d}x$，两边积分得 $\displaystyle\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int(1+x+x^2)\mathrm{d}x$，求积分得

$$\ln|y|=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+C_1,$$

即

$$y=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}=C\mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}\ (C=\pm\mathrm{e}^{C_1}),$$

从而通解为 $y=C\mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}$，由 $y(0)=\mathrm{e}$，得 $C=\mathrm{e}$， 故特解为 $y=\mathrm{e}^{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}$．

例 9.2.2 【2010（3）】某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$________．

解　收益弹性为

$$\frac{ER}{Ep}=\frac{p}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=1+p^3,$$

整理得

$$\frac{1}{R}\cdot\mathrm{d}R=\left(\frac{1}{p}+p^2\right)\mathrm{d}p,$$

两边积分得

$$\ln R=\ln p+\frac{1}{3}p^3+\ln C,$$

从而有 $R=Cp\mathrm{e}^{\frac{p^3}{3}}$，由 $R(1)=1$，解得 $C=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$，故 $R=p\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$．

9.2.2　题型二：求解齐次微分方程

例 9.2.3　求微分方程 $(3x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$ 的通解．

解　整理方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2-2xy-3x^2}{x^2-2xy},$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，从而方程化为

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{3(u^2-u-1)}{2u-1},$$

解之得 $u^2-u-1=Cx^{-3}$，即

$$y^2-xy-x^2=Cx^{-1}，或\ xy^2-x^2y-x^3=C.$$

例 9.2.4 【2007（3）】微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y|_{x=1}=1$ 的特解为________．

解 令$u=\dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，从而方程化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u-\frac{1}{2}u^3,$$

即$\dfrac{\mathrm{d}u}{u^3}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{2x}$，两边积分得

$$-\frac{1}{2u^2}=-\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}C,$$

即$\dfrac{1}{u^2}=\ln x+C$，从而

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{1}{\ln x+C},$$

将$y\big|_{x=1}=1$代入左式得$C=1$，故满足条件的方程的特解为$y=\dfrac{x}{\sqrt{\ln x+1}}$.

注：由于x在分母上，因此$x\neq 0$，由条件$y\big|_{x=1}=1$可知，函数的连续区间包含$x=1$，不包含$x=0$，故在此区间内$x>0$，从而$\ln|x|$可以写为$\ln x$.

例 9.2.5　求微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$的通解.

解　令$u=\dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，当$x>0$时，原方程化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u-\sqrt{1+u^2},$$

即$\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，其通解为：

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=-\ln x+C_1，\text{或}\ u+\sqrt{1+u^2}=\frac{C}{x}.$$

代回原变量，得通解为

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=C\ (x>0).$$

当$x<0$时，令$t=-x$，则$t>0$，原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{y-\sqrt{t^2+y^2}}{t},$$

从方程的解为

$$y+\sqrt{t^2+y^2}=C.$$

将$x=-t$代入上式得

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=C\ (x<0).$$

综上可得，微分方程的通解为

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=C，\quad x\neq 0.$$

9.2.3 题型三：求解一阶线性微分方程

例 9.2.6　【2006（3）】非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解，$y_1(x)$，$y_2(x)$，C 为任意常数，则该方程的通解是（　　）.

（A）$C[y_1(x)-y_2(x)]$　　（B）$y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

（C）$C[y_1(x)+y_2(x)]$　　（D）$y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

解　由于 $y_1(x)-y_2(x)$ 是对应齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=0$ 的非零解，所以它的通解是 $Y=C[y_1(x)-y_2(x)]$，故非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解为 $y=y_1(x)+Y=y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$，故正确答案选项 B.

例 9.2.7　【2010（3）】设 y_1，y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解. 若存在常数 λ，μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是对应的齐次方程的解，则（　　）.

（A）$\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$　　（B）$\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$

（C）$\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$　　（D）$\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$

解　因 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是方程 $y'+p(x)y=0$ 的解，所以

$$(\lambda y_1-\mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1-\mu y_2)=0,$$

即

$$\lambda[y_1'+p(x)y_1]-\mu[y_2'+p(x)y_2]=0.$$

由已知 y_1，y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解. 因此得

$$\lambda q(x)-\mu q(x)=(\lambda-\mu)q(x)=0,$$

因为 $q(x)\neq 0$，所以 $\lambda-\mu=0$. 又因为 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是非齐次 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解，故

$$(\lambda y_1+\mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=q(x),$$

即

$$\lambda[y_1'+p(x)y_1]+\mu[y_2'+p(x)y_2]=q(x).$$

由已知得 $(\lambda+\mu)q(x)=q(x)$. 因为 $q(x)\neq 0$，所以 $\lambda+\mu=1$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$.

例 9.2.8　求解下列一阶线性微分方程：

（1）$y'+ay=b\sin x$（其中 a,b 为常数）；　（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x+y^2}$.

解　（1）因 $P(x)=a$，$Q(x)=b\sin x$，故非齐次一阶线性微分方程的通解为

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int a\mathrm{d}x}\left(C+\int b\sin x\cdot\mathrm{e}^{\int a\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{e}^{-ax}\left(C+\int b\sin x\cdot\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x\right)\\&=\mathrm{e}^{-ax}\left[C+\frac{b}{a^2+1}\mathrm{e}^{ax}(a\sin x-\cos x)\right].\end{aligned}$$

（2）方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=y^2.$$

这是 x 关于 y 的一阶线性微分方程，其中 $P(y)=-1,\quad Q(y)=y^2$，故方程的通解为：

$$x=\mathrm{e}^{-\int(-1)\mathrm{d}y}[C+\int y^2\cdot\mathrm{e}^{\int(-1)\mathrm{d}y}\cdot\mathrm{d}y]$$

$$=\mathrm{e}^y\left(C+\int y^2\cdot\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right)=C\mathrm{e}^y-y^2 2y-2\,.$$

例 9.2.9　求微分方程（$x-2xy-y^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2=0$ 的通解.

解　把 y 视为自变量，把 x 视为 y 的函数，原方程化为关于函数 x 的线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{1-2y}{y^2}x=1\,,$$

其通解为

$$x=\mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left[\int Q(y)\cdot\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]=\mathrm{e}^{-\int\frac{1-2y}{y^2}\mathrm{d}y}\left(\int\mathrm{e}^{\int\frac{1-2y}{y^2}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{1}{y}+2\ln y}\left(\int\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}-2\ln y}\mathrm{d}y+C\right)=y^2\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}}+C\right)$$

$$=y^2+Cy^2\mathrm{e}^{\frac{1}{y}}\,.$$

注：表面上看此方程不属于标准的一阶线性方程，但如果过交换 x,y 的地位，即把 y 视为自变量，把 x 视为因变量，这时原方程是一阶线性微分方程.

9.2.4　题型四：求解伯努利方程

例 9.2.10　求微分方程 $3(1+x^2)y'+2xy=2xy^4$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解.

解　将方程改写为

$$y^{-4}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2x}{3(1+x^2)}y^{-3}=\frac{2x}{3(1+x^2)}\,,$$

这是伯努利方程，令 $z=y^{-3}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-3y^{-4}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入上述方程得

$$-\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{2x}{3(1+x^2)}z=\frac{2x}{3(1+x^2)}\,,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2x}{1+x^2}z=-\frac{2x}{1+x^2}\,.$$

这是一阶线性非齐次方程，其中

$$P(x)=-\frac{2x}{1+x^2}，\quad Q(x)=-\frac{2x}{1+x^2}\,,$$

因此

$$z=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\cdot\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\left(-\int\frac{2x}{1+x^2}\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{\ln(1+x^2)}\left[-\int\frac{2x}{1+x^2}\cdot\mathrm{e}^{-\ln(1+x^2)}\mathrm{d}x+C\right]=(1+x^2)\left[-\int\frac{2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=1+C(1+x^2),$$

于是原方程的通解为

$$\frac{1}{y^3}=1+C(1+x^2).$$

由初始条件 $y\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$，有 $8=1+C$，即 $C=7$，因此所求的特解是 $y=(7x^2+8)^{-\frac{1}{3}}$.

例 9.2.11　设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t$，试求 $f(x)$.

解　令 $y=f(x)$，由题意

$$f'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^x f^2(x),$$

整理得

$$f'(x)=f(x)+\mathrm{e}^x f^2(x),$$

化为伯努利方程的标准形式为

$$y'-y=\mathrm{e}^x y^2,$$

令 $z=y^{1-2}=y^{-1}$，因此 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-y^{-2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，方程化为一阶线性非齐次方程

$$z'+z=-\mathrm{e}^x,$$

因此

$$z=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{-x},$$

当 $x=0$ 时，$y=1$，$z=1$，解得 $C=\dfrac{3}{2}$，因此

$$y=f(x)=\frac{1}{-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}}=\frac{2}{3\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}.$$

9.2.5　题型五：求解二阶线性微分方程

例 9.2.12　已知 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$，$y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$，$y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$ 是某个二阶线性非齐次微分方程的 3 个解，求此微分方程.

解法 1　由题设知，e^{2x} 与 e^{-x} 是对应的齐次方程两个线性无关的解，且 $x\mathrm{e}^x$ 是非齐次方程的一个特解，故设此方程为

$$y'' - y' - 2y = f(x).$$

将 $y = xe^x$ 代入上式，得

$$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2xe^x = e^x - 2xe^x.$$

因此所求方程为

$$y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x.$$

解法 2　由题设知，e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解，且 xe^x 是非齐次方程的一个特解，故 $y = xe^x + C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$ 是所求方程的解，由

$$y' = e^x + xe^x + 2C_1e^{2x} - C_2e^{-x},\quad y'' = 2e^x + xe^x + 4C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$$

消去 C_1，C_2 得所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

例 9.2.13　【2010（1）】求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解.

解　对应的齐次线性微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$，解得特征根为 $r_1 = 1$，$r_2 = 2$，所以方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解为：

$$Y = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

设 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的特解为 $y^* = x(ax+b)e^x$，则

$$(y^*)' = (ax^2 + 2ax + bx + b)e^x,\quad (y^*)'' = (ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b)e^x,$$

带入原方程，解得 $a = -1, b = -2$，故特解为：

$$y^* = x(-x-2)e^x,$$

所以原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1e^x + C_2e^{2x} - x(x+2)e^x.$$

9.2.6　题型六：应用题

例 9.2.14　【2006（3）】已知在 xOy 坐标平面上，连续曲线 L 过点 $M(1,0)$，其上任意一点 $P(x,y)$ $(x \neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax（常数 $a > 0$）.

（1）求 L 的方程；

（2）当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时，确定 a 的值.

解　（1）由题意，有

$$y' - \frac{1}{x}y = ax,$$

求得其通解为

$$y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int axe^{-\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right) = ax^2 + Cx,$$

将 $x = 1$，$y = 0$ 代入上式得 $C = -a$，从而 L 的方程为 $y = ax^2 - ax$.

（2）如图 9.1 所示，L 与直线 $y = ax$ 的交点坐标为 $(0,0)$ 和 $(2,2a)$，那么 L 与直线 $y = ax$ 围成平面图形的面积为

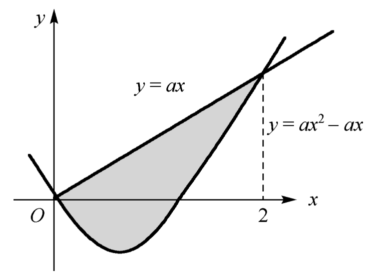


图 9.1　平面图形面积

$$S(a)=\int_0^2(ax-ax^2+ax)\mathrm{d}x=\int_0^2(2ax-ax^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}a\,,$$

于是由题设知 $\frac{4}{3}a=\frac{8}{3}$，从而 $a=2$.

例 9.2.15　设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)$ $(x>0)$ 到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，且 L 经过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$. 试求

（1）曲线 L 的方程；

（2）L 位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小.

解　（1）设曲线 L 过点 $P(x,y)$ 的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)\,,$$

令 $X=0$，则得该切线在 y 轴上的截距为 $y-xy'$. 由题设知

$$\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'\,,$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,.$$

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}\,,$$

两边积分得

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=-\ln x+\ln C\,,$$

即 $u+\sqrt{1+u^2}=\frac{C}{x}$，解得

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=C\,.$$

由于 L 经过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，可解得 $C=\frac{1}{2}$，于是 L 方程为

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\text{，即 }y=\frac{1}{4}-x^2\,.$$

（2）如图 9.2 所示，设第一象限内曲线 $y=\frac{1}{4}-x^2$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-\left(\frac{1}{4}-x^2\right)=-2x(X-x)\,,$$

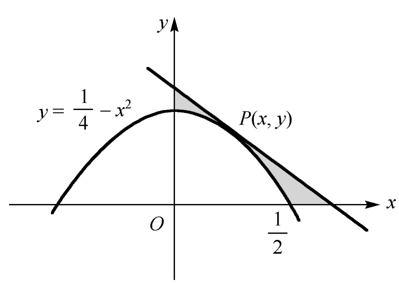


图 9.2　切线方程图形

即

$$Y=-2xX+x^2+\frac{1}{4}\quad,\quad 0<x\leqslant\frac{1}{2}.$$

它与 x 轴及 y 轴交点分别为 $\left(\dfrac{x^2+\frac{1}{4}}{2x},0\right)$ 与 $\left(0,x^2+\dfrac{1}{4}\right)$．因此所求面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}{2x}-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\mathrm{d}x.$$

而

$$S'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4x^2\left(x^2+\frac{1}{4}\right)-\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{4x^2}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\left(3x^2-\frac{1}{4}\right),$$

令 $S'(x)=0$，解得唯一驻点 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．当 $0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 时，$S'(x)<0$；$x>\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 时，$S'(x)>0$，因而 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 是 $S(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 内的唯一极小值点，即最小值点．于是所求切线为

$$Y=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}X+\frac{3}{36}+\frac{1}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{3}X+\frac{1}{3}.$$

9.3 深 化 训 练

9.3.1 填空题

（1）【2005（1）】微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为________.

（2）【2006（2）】微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是________.

（3）微分方程 $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$ 的通解为________.

（4）微分方程 $y'\tan x=y\ln y$ 且满足 $y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}$ 的解为________.

（5）【2008（1，3）】微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解为 $y=$________.

（6）【2011（1）】微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为________.

（7）【2007（1）】二阶常系数非齐次微分方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$________.

（8）函数 $y=y(x)$ 在点 $(0,-2)$ 处的切线为 $2x-3y=6$，且 $y=y(x)$ 满足 $y''=6x$，则此函数为________.

9.3.2 单项选择题

（1）设函数 $y=y(x)$ 满足 $y'\cos^2x+y=\tan x$，且当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$y=0$，则当 $x=0$ 时，$y=$（　　）.

（A）$\dfrac{\pi}{4}$　　（B）$-\dfrac{\pi}{4}$　　（C）-1　　（D）1

（2）方程 $y''+y=0$ 的通解为（　　）.

（A）$y=C_1\cos x+C_2\sin x$　　（B）$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$

（C）$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$　　（D）$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$

（3）方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^x\cos 2x$ 的特解形式为（　　）.

（A）$A\mathrm{e}^x\cos 2x$　　（B）$Ax\mathrm{e}^x\cos 2x+Bx\mathrm{e}^x\sin 2x$

（C）$A\mathrm{e}^x\cos 2x+B\mathrm{e}^x\sin 2x$　　（D）$Ax^2\mathrm{e}^x\cos 2x+Bx^2\mathrm{e}^x\sin 2x$

（4）【2011（2）】微分方程 $y''-\lambda^2y=\mathrm{e}^{\lambda x}+\mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda>0)$ 的特解形式为（　　）.

（A）$a(\mathrm{e}^{\lambda x}+\mathrm{e}^{-\lambda x})$　　（B）$ax(\mathrm{e}^{\lambda x}+\mathrm{e}^{-\lambda x})$

（C）$x(a\mathrm{e}^{\lambda x}+b\mathrm{e}^{-\lambda x})$　　（D）$x^2(a\mathrm{e}^{\lambda x}+b\mathrm{e}^{-\lambda x})$

（5）函数 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^x$ 满足的一个微分方程是（　　）.

（A）$y''-y'-2y=3x\mathrm{e}^x$　　（B）$y''-y'-2y=3\mathrm{e}^x$

（C）$y''+y'-2y=3x\mathrm{e}^x$　　（D）$y''+y'-2y=3\mathrm{e}^x$

9.3.3　求下列微分方程的通解：

（1）$y'-xy'=a(y^2+y')$；

（2）$(x+y)\mathrm{d}x+(3x+3y-4)\mathrm{d}y=0$.

9.3.4　求下列微分方程的特解：

（1）$xy'+y-\mathrm{e}^x=0$，　$y\big|_{x=1}=\mathrm{e}$；

（2）$xy'+y=x\mathrm{e}^x$，　$y(1)=1$.

9.3.5　求下列微分方程的通解：

（1）$y''-12y'+35y=0$；

（2）$y''+2y'+5y=0$；

（3）$y''-2y'+2y=\mathrm{e}^x$；

（4）$y''+y'=x^2$；

（5）$y''-4y'=\mathrm{e}^{2x}$；

（6）$y''+\lambda y'=2x+1$，其中 λ 为常数.

9.3.6　求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x^2+y^2+2xy}$ 的通解.

9.3.7　【2003（4）】设 $y=f(x)$ 是第一象限内连接点 $A(0,1)$，$B(1,0)$ 的一段连续曲线，$M(x,y)$ 为该曲线上任意一点，点 C 为 M 在轴上的投影，O 为坐标原点，若梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为 $\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{3}$，求 $f(x)$ 的表达式.

9.3.8　【2005（2）】用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程

$$(1-x^2)y''-xy'+y=0,$$

并求其满足 $y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=2$ 的特解.

9.4　深化训练详解

9.3.1　（1）$y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$；**提示**　原方程化为

$$y'+\frac{2}{x}y=\ln x,$$

于是通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\ln x\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x^2}\cdot\left(\int x^2\ln x\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+\frac{C}{x^2},$$

由于 $y(1)=-\frac{1}{9}$，解得 $C=0$，故所求解为 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$.

（2）$y=Cx\mathrm{e}^{-x}(x\neq 0)$；**提示**　当 $y=0$ 时，方程显然成立．当 $y\neq 0$ 时，原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x,$$

两边积分得 $\ln|y|=\ln|x|-x+C_1$，整理得 $|y|=\mathrm{e}^{C_1}|x|\mathrm{e}^{-x}$，取 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$，则方程解为 $y=Cx\mathrm{e}^{-x}$. 综上，微分方程的通解为 $y=Cx\mathrm{e}^{-x}$，其中 C 为任意实数.

（3）$y=C\left(\frac{x}{4-x}\right)^{\frac{1}{4}}$；**提示**　当 $y=0$ 时，方程显然成立．当 $y\neq 0$ 时，

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\frac{1}{4x-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{4-x}\mathrm{d}x,$$

因此

$$\ln|y|=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4-x}\right|+\ln|C|.$$

解得方程的通解为 $y=C\left(\frac{x}{4-x}\right)^{\frac{1}{4}}$，其中 C 为任意实数.

（4）$y=\mathrm{e}^{\sin x}$；**提示**　$\int\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y=\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$，解得 $\ln|\ln y|=\ln|\sin x|+\ln|C|$，即有 $\ln y=C\sin x$，当 $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}$，$C=1$，故方程的特解为 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$.

（5）$y=\frac{1}{x}$；分离变量，得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，两边积分有

$$\ln|y|=-\ln|x|+\ln|C|,$$

因此方程的通解为 $xy=C$．利用条件 $y(1)=1$ 知 $C=1$，故满足条件的解为 $y=\frac{1}{x}$.

（6）$\mathrm{e}^{-x}\sin x$；**提示**　微分方程的通解为

$$y = e^{-\int dx}\left(\int e^{-x}\cos x \cdot e^{\int dx}dx + C\right) = e^{-x}(C + \sin x),$$

由初值条件 $y(0)=0$ 得 $C=0$，所以方程的特解为 $y = e^{-x}\sin x$.

（7） $y = C_1e^x + C_2e^{3x} - 2e^{2x}$ ；**提示**　对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

解得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$，则对应齐次方程的通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$. 设原方程的特解为 $y^* = Ae^{2x}$，代入原方程可得

$$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 2e^{2x},$$

解得 $A=-2$，所以原方程的特解为 $y^* = -2e^{2x}$，故原方程的通解为

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x} - 2e^{2x} .$$

（8） $y(x) = x^3 + \dfrac{2}{3}x - 2$ ；**提示**　方程 $y'' = 6x$ 两边积分得 $y' = 3x^2 + C_1$，再次积分 $y(x) = x^3 + C_1x + C_2$，由初值条件为 $y'(0) = \dfrac{2}{3}$， $y(0) = -2$，解得 $C_1 = \dfrac{2}{3}$， $C_2 = -2$.

9.3.2 （1）C；**提示**　整理得

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\cos^2 x}y = \frac{\sin x}{\cos^3 x},$$

利用公式得

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)e^{-\int P(x)dx} = \tan x - 1 + Ce^{-\tan x},$$

由初值条件，当 $x = \dfrac{\pi}{4}$ 时， $y = 0$，特解为 $y = \tan x - 1$.

（2）A；**提示**　特征方程为 $r^2 + 1 = 0$，解得特征根为 $r_1 = i$， $r_2 = -i$，因此微分方程的解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) = C_1\cos x + C_2\sin x .$$

（3）C；**提示**　非齐次二阶线性微分方程 $y'' - 3y' + 2y = e^x\cos 2x$ 对应的齐次微分方程 $y'' - 3y' + 2y = e^x\cos 2x$ 的特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$，解得特征根为 $r_1 = 1, r_2 = 2$. 而 $\lambda \pm i\omega = 1 \pm 2i$ 不是特征方程的根，因此非齐次微分方程的特解的形式为：

$$f(x) = Ae^x\cos 2x + Be^x\sin 2x .$$

（4）C；**提示**　由于 $\pm\lambda$ 均是特征方程 $r^2 - \lambda^2 = 0$ 的根，自由项为 $e^{\lambda x}$ 及 $e^{-\lambda x}$ 的特解形式分别为 $x(ae^{\lambda x})$ 及 $x(be^{-\lambda x})$，所以微分方程 $y'' - \lambda^2y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}(\lambda > 0)$ 的特解形式为 $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.

（5）D；**提示**　由所给解的形式，可知原微分方程对应的齐次微分方程的特征根为

$$\lambda_1 = 1，\lambda_2 = -2.$$

则对应的齐次微分方程的特征方程为 $(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$，即 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.故对应的齐次微分方程为

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

又 $y^* = xe^x$ 为原微分方程的一个特解，而 $\lambda = 1$ 为单特征根，故原非齐次线性微分方程右端的非齐次项应具有形式 $f(x) = Ce^x$.

9.3.3 （1）当 $y = 0$ 时，方程显然成立．当 $y \neq 0$ 时，原方程变形为 $(1-x-a)\dfrac{dy}{dx} = ay^2$.分离变量得 $\dfrac{dy}{ay^2} = \dfrac{dx}{1-x-a}$ ，积分得

$$-\frac{1}{ay} = -\ln|1-a-x| - C_1,$$

记 $C = aC_1$，则微分方程的通解为

$$y = \frac{1}{C + a\ln|1-a-x|} \text{ 或 } y = 0 .$$

（2）原方程变形为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-(x+y)}{3(x+y)-4},$$

令 $x + y = u$ ，则 $y = u - x$ ， $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} - 1$ ，原方程化为

$$\frac{du}{dx} - 1 = -\frac{-u}{3u-4},$$

即 $\dfrac{3u-4}{2u-4}du = dx$ ，积分得

$$\int 3du + \int \frac{2}{u-2}du = 2\int dx,$$

从而

$$3u + 2\ln|u-2| = 2x + C .$$

将 $u = x + y$ 代入上式，得原方程的通解为

$$x + 3y + 2\ln|2-x-y| = C .$$

9.3.4 （1）原方程可写成 $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{e^x}{x}$ ，这是一阶线性非齐次方程，其中

$$P(x) = \frac{1}{x},\quad Q(x) = \frac{e^x}{x},$$

代入公式得

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(\int \frac{e^x}{x}\cdot e^{\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right) = e^{-\ln x}\left(\int \frac{e^x}{x}\cdot e^{\ln x}dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{x}(e^x + C) .$$

再由条件 $y|_{x=1} = e$ ，有 $e = e + C$ ，即 $C = 0$.因此所求的特解是 $y = \dfrac{e^x}{x}$.

（2）**解法 1**　$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\cdot\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{x}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$

$=\dfrac{1}{x}[(x-1)\mathrm{e}^{x}+C]$，

将 $x=1$， $y=1$ 代入，得 $C=1$，所以特解为 $y=\dfrac{x-1}{x}\mathrm{e}^{x}+\dfrac{1}{x}$.

解法 2　由于 $xy'+y=(xy)'$，因此原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy)=x\mathrm{e}^{x},$$

两边积分得

$$xy=\int x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=(x-1)\mathrm{e}^{x}+C,$$

当 $x=1$， $y=1$ 时， $C=1$．故所求特解为 $y=\dfrac{(x-1)\mathrm{e}^{x}+1}{x}$.

9.3.5　（1）特征方程为 $r^2-12r+35=0$，解得 $r_1=5$，$r_2=7$．故微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{5x}+C_2\mathrm{e}^{7x}$.

（2）微分方程的特征方程为 $r^2+2r+5=0$，特征根为 $r=-1\pm 2\mathrm{i}$，所以微分方程通解为 $y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

（3）对应齐次方程的特征方程为 $r^2-2r+2=0$，特征根为 $r=1\pm\mathrm{i}$，故齐次方程通解为

$$Y=\mathrm{e}^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

设原方程特解为 $y^*=A\mathrm{e}^{x}$，代入原方程可得 $A=1$，则 $y^*=\mathrm{e}^{x}$，故原方程通解为

$$y=Y+y^*=\mathrm{e}^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x+1).$$

（4）**解法 1**　对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+\lambda=0$，解之得 $\lambda=0$，$\lambda=-1$.故齐次方程的通解为 $Y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-x}$．设非齐次方程的特解为

$$y^*=x(ax^2+bx+c),$$

代入原方程得 $a=\dfrac{1}{3}$， $b=-1$， $c=2$．因此，原方程的通解为

$$y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x+C_1+C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

解法 2　令 $y'=p$，代入原方程得 $p'+p=x^2$，故

$$p=\mathrm{e}^{-x}\left(\int x^2\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C_0\right)=\mathrm{e}^{-x}(x^2\mathrm{e}^{x}-2x\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}^{x}+C_0).$$

再积分得到

$$y=\int(x^2-2x+2+C_0\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x+C_1+C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

（5）对应齐次方程的特征方程为 $r^2-4=0$，特征根为 $r=\pm 2$，故齐次方程通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

设原方程特解为 $y^* = Axe^{2x}$，代入原方程可得 $A=\frac{1}{4}$．因此原方程的通解为

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{4}xe^{2x} = C_1e^{-2x} + \left(C_2 + \frac{1}{4}x\right)e^{2x},$$

其中 C_1， C_2 为任意常数．

（6）对应齐次方程 $y'' + \lambda y' = 0$ 的特征方程 $r^2 + \lambda r = 0$ 的特征根为 $r = 0$ 或 $r = -\lambda$．当 $\lambda \neq 0$ 时， $y'' + \lambda y' = 0$ 的通解为

$$y = C_1 + C_2e^{-\lambda x},$$

其中 C_1， C_2 为任意常数．设原方程的特解形式为 $y^* = x(Ax + B)$，代入原方程，比较同次幂项的系数，解得 $A = \frac{1}{\lambda}$， $B = \frac{\lambda - 2}{\lambda^2}$，故原方程的通解为

$$y = C_1 + C_2e^{-\lambda x} + x\left(\frac{1}{\lambda}x + \frac{\lambda - 2}{\lambda^2}\right).$$

当 $\lambda = 0$ 时， $y'' = 2x + 1$，积分两次得方程的通解为

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2.$$

9.3.6　原式整理为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

令 $u = x + y$，得 $\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u^2}$，分离变量得

$$\frac{u^2}{u^2+1}du = dx,$$

等式两端同时积分得 $u - \arctan u = x + C$，故该微分方程的通解为 $y = \arctan(x + y) + C$．

9.3.7　如图 9.3 所示，梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为 $\frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}$，且满足 $f(0) = 1$， $f(1) = 0$，根据题意，有

$$\frac{x}{2}[1 + f(x)] + \int_x^1 f(t)dt = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}.$$

当 $x \in (0,1)$ 时，两边关于 x 求导，得

$$\frac{1}{2}[1 + f(x)] + \frac{1}{2}xf'(x) - f(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

整理得

$$f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = \frac{x^2 - 1}{x},$$

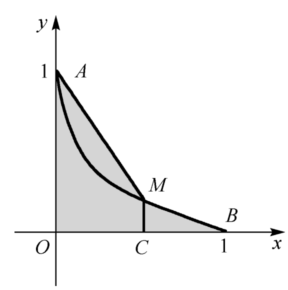


图 9.3　梯形与曲边三角形面积

故

$$y=\mathrm{e}^{-\int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{x^2-1}{x}\mathrm{e}^{\int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{\ln x}\left(\int\frac{x^2-1}{x}\mathrm{e}^{-\ln x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=x\left(\int\frac{x^2-1}{x^2}\mathrm{d}x+C\right)=x\left(x+\frac{1}{x}+C\right)=x^2+1+Cx\ .$$

当 $x=0$ 时，$f(0)=1$．故有 $2+C=0$，解得 $C=-2$．所以 $f(x)$ 的表达式为

$$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2,\quad x\in[0,1]\ .$$

9.3.8　由于

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sin t}\right),$$

代入原方程，得 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=0$．解此微分方程，得

$$y=C_1\cos t+C_2\sin t=C_1x+C_2\sqrt{1-x^2}\ ,$$

将初始条件 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=2$ 代入，有 $C_1=2$，$C_2=1$．故满足条件的特解为

$$y=2x+\sqrt{1-x^2}\ .$$

9.5　综合提高训练

例 9.5.1　设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$．若 $\int_0^{f(x)}g(t)\,\mathrm{d}t=x^2\mathrm{e}^x$，求 $f(x)$ 的表达式.

解　等式两边对 x 求导得

$$g[f(x)]f'(x)=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x,$$

而 $g[f(x)]=x$，故

$$xf'(x)=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x\ .$$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x$，积分得 $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x+C$．由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故由

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}[(x+1)\mathrm{e}^x+C]=0$$

得 $C=-1$，因此 $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-1$.

例 9.5.2　【2004（3）】设级数 $\dfrac{x^4}{2\cdot 4}+\dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\dfrac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 的和函数为 $S(x)$，求：（1）$S(x)$ 所满足的一阶微分方程；（2）$S(x)$ 的表达式.

解　（1）对 $S(x)=\dfrac{x^4}{2\cdot 4}+\dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\dfrac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$，逐项求导得到

$$S'(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot4}+\frac{x^7}{2\cdot4\cdot6}+\cdots=x\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6}+\cdots\right)=x\left[\frac{x^2}{2}+S(x)\right],$$

因而$S(x)$为微分方程$y'=xy+\frac{1}{2}x^3$的解，且满足$y(0)=0$.

（2）方程$y'=xy+\frac{1}{2}x^3$化为标准形式，$y'-xy=\frac{1}{2}x^3$，其通解为

$$y=\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\left(\int\frac{x^3}{2}\mathrm{e}^{-\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=-\frac{x^2}{2}+C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}-1,$$

由初始条件$y(0)=0$得$C=1$，故$y=-\frac{x^2}{2}+\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}-1$，因而幂级数的和函数为

$$S(x)=-\frac{x^2}{2}+\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}-1.$$

例 9.5.3　【2009（3）】设$y=f(x)$可导，且$f(x)>0$. 已知曲线$y=f(x)$与直线$y=0$，$x=1$及$x=t(t>1)$所围成的曲边梯形，绕x轴旋转一周所得的立体体积值是曲边梯形面积值的πt倍，求该曲线方程.

解　旋转体的体积为

$$V=\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x.$$

曲边梯形的面积为$S=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x$，则由题意知$V=\pi tx$，因而

$$\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\pi t\int_1^t f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=t\int_1^t f(x)\mathrm{d}x.$$

两边对t求导可得$f^2(t)=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x+tf(t)$，再对$t$求导得

$$2f(t)f'(t)=f(t)+tf'(t)+f(t),$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{2y}t=1,$$

解得

$$t=C\cdot y^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}y.$$

在体积表达式令$t=1$，有$f^2(1)-f(1)=0$，因为$f(t)>0$，所以$f(1)=1$，故可解得$C=\frac{1}{3}$，因此$t=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}+2y\right)$，所以该曲线方程为

$$2y+\frac{1}{\sqrt{y}}-3x=0.$$

例 9.5.4 【2012（3）】已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$.

（1）求 $f(x)$ 的表达式；

（2）求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点.

解　（1）$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$，解得 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$，因此

$$f(x)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^x.$$

将 $f(x)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^x$ 和 $f''(x)=4C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^x$ 代入到 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$ 中，得

$$5C_1\mathrm{e}^{-2x}+2C_2\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x,$$

比较同类项系数得 $C_1=0$，$C_2=1$，因此 $f(x)$ 的表达式为 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

（2）曲线方程可化为 $y=\mathrm{e}^{x^2}\cdot\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，根据变上限函数求导公式，有

$$y'=2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{x^2}\cdot\mathrm{e}^{-x^2}=1+2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

$$y''=2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+4x^2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+2x=2x+2(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

令 $y''=0$，解得 $x=0$，且当 $x>0$ 时，$y''>0$，当 $x<0$ 时，$y''<0$，因此曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 在 $x=0$ 的两侧凹凸性不同，故曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点为 $(0,0)$.

例 9.5.5 【2015（3）】设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零．若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式.

解　曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

切线与 x 轴的交点为 $\left(x_0-\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)},0\right)$，由题意，

$$\frac{1}{2}\left|x_0-\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}-x_0\right|\cdot|f(x_0)|=4,$$

解得 $f'(x_0)=\dfrac{1}{8}f^2(x_0)$，由 x_0 的任意性可知，函数 $y=f(x)$ 满足微分方程

$$y'=\frac{1}{8}y^2,$$

解得 $-\dfrac{8}{y}=x+C$，由条件 $f(0)=2$ 可知，$C=-4$，因此 $y=\dfrac{8}{4-x}$，$x\in I$.

例 9.5.6 【2014（3）】设函数 $f(u)$ 具有连续导数，且 $z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足

$$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x.$$

若 $f(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

解　由题意

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x\cos y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x(-\sin y),$$

所以等式 $\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x$ 化为

$$f'(\mathrm{e}^x\cos y)=4f(\mathrm{e}^x\cos y)+\mathrm{e}^x\cos y,$$

即有 $f'(u)=4f(u)+u$，整理为一阶线性非齐次方程的标准形式为

$$f'(u)-4f(u)=u,$$

解得方程的通解为

$$f(u)=C\mathrm{e}^{4u}-\frac{1}{4}u-\frac{1}{16},$$

又因为 $f(0)=0$，解得 $C=\frac{1}{16}$，故 $f(u)=\frac{1}{16}\mathrm{e}^{4u}-\frac{1}{4}u-\frac{1}{16}$.

例 9.5.7【2011（3）】设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续的导数，$f(0)=1$，且 $\iint\limits_{D_t}f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_t}f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D_t=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant t-x,0\leqslant x\leqslant t\}$ $(0<t\leqslant 1)$，求 $f(x)$ 的表达式.

解　积分区域如图 9.4 所示.

由于

$$\iint\limits_{D_t}f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^{t-x}f'(x+y)\,\mathrm{d}y\ \underline{\underline{u=x+y}}\ \int_0^t\mathrm{d}x\int_x^t f'(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^t[f(t)-f(x)]\mathrm{d}x=tf(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\iint\limits_{D_t}f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(t)\cdot\iint\limits_{D_t}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}t^2f(t),$$

因此有

$$tf(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}t^2f(t),$$

等式两边求导数并整理得

$$f'(t)=\frac{2}{2-t}f(t),$$

因此 $f(t)=\frac{C}{(2-t)^2}$，由条件 $f(0)=1$，解得 $C=4$，故求 $f(x)$ 的表达式为

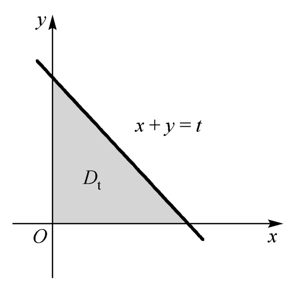


图 9.4　积分区域

$$f(x)=\frac{4}{(2-x)^2},\quad x\in[0,1].$$

2013 年考研数学三高等数学考题

（1）当 $x\to 0$ 时，用“$o(x)$”表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是（　　）.

（A）$x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　（B）$o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

（C）$o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　（D）$o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

解　根据高阶无穷小量的定义，若选项 D 成立，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x)+o(x^2)}{x^2}=0.$$

事实上，

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x)+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{o(x)}{x^2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}\cdot\frac{1}{x},$$

当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{o(x)}{x}$ 为无穷小量，而 $\dfrac{1}{x}$ 为无穷大量，因此极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{x}$ 不一定存在．例如取 $o(x)=x^2$，$o(x)=x^3$，$o(x)=x^{\frac{3}{2}}$ 等，上述极限结果均不相同，故选项 D 错误.

（2）函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

解　$x=0$，$x=-1$，$x=1$ 为间断点．由洛必达法则可知 $\lim\limits_{x\to 0}x\ln|x|=0$，又因为

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1,$$

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{\mathrm{e}^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to -1}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2},$$

因此 $x=0$，$x=1$ 为可去间断点．正确答案为选项 C.

（3）设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$ 位于第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $(k=1,2,3,4)$，则（　　）.

（A）$I_1>0$　　（B）$I_2>0$　　（C）$I_3>0$　　（D）$I_4>0$

解　正确答案选为选项 B，根据二重积分的几何意义，当积分区域落在第二象限内时，则有 $y-x\geqslant 0$，且等号不恒成立，故 $I_2>0$.

（4）设 $\{a_n\}$ 为正项数列，下列选项正确的是（　　）.

（A）若 $a_n > a_{n+1}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛

（B）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛,则 $a_n > a_{n+1}$

（C）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则存在常数 $p>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在

（D）若存在常数 $p>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

解　正确选项为 D，根据正项级数的比较判别法的极限形式可知，选项 D 正确．选项 A 错误，若取 $a_n = 1+\dfrac{1}{n}$，显然 $a_n > a_{n+1}$，但根据级数收敛的必要条件可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 发散．选项 B 错误．例如级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

收敛，但却不满足 $a_n > a_{n+1}$．选项 C 错误，例如取 $a_n = \dfrac{\ln n}{n^p}$，其中 $p>1$．

（5）设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线,则 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=$________.

解　曲线 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线斜率为 $y'\big|_{x=1}=1$，而 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，因此有

$$f(1)=0,\quad f'(1)=1.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right)-f(1)}{-\dfrac{2}{n+2}}\cdot\left(-\frac{2n}{n+2}\right)=-2f'(1)=-2.$$

（6）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$________.

解　所给方程 $(z+y)^x=xy$ 两边取对数，得到

$$x\ln(z+y)=\ln(xy)=\ln x+\ln y,$$

方程两边对 x 求偏导得到

$$\ln(z+y)+\frac{x}{z+y}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}.$$

将 $x=1,y=2$ 代入所给方程得到 $z+2=2$，即 $z=0$．将 $x=1,y=2,z=0$ 代入上式有

$$\ln 2+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=1,$$

即 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2-2\ln 2$．

（7）$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$________.

解 原式$=\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}\frac{1}{1+x}=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=[\ln x-\ln(1+x)]\big|_1^{+\infty}=\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2$.

（8）微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为 $y=$________.

解 特征方程为 $r^2-r+\frac{1}{4}=0$，解得 $r_1=r_2=\frac{1}{2}$，因此二阶齐次常系数线性微分方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

（9）（本题满分 10 分）当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值.

解 根据等价无穷小量的定义，有

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos(2x)\cos(3x)}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos(2x)\cos(3x)+2\cos x\sin(2x)\cos(3x)+3\cos x\cos(2x)\sin(3x)}{anx^{n-1}},$$

由于当 $n=2$ 时，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos(2x)\cos(3x)}{anx^{n-1}}=\frac{1}{2a},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin(2x)\cos(3x)}{anx^{n-1}}=\frac{4}{2a},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x\cos(2x)\sin(3x)}{anx^{n-1}}=\frac{9}{2a},$$

因此$\frac{1+4+9}{2a}=1$，解得 $a=7$．当 $n\neq 2$ 时，显然不符合题意．故 $n=2$， $a=7$.

（10）（本题满分 10 分）设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积．若 $V_y=10V_x$,求 a 的值.

解 如图 1 所示，根据旋转体体积的计算公式，有

$$V_x=\int_0^a\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\cdot\frac{3}{5}a^{\frac{5}{3}},$$

$$V_y=\pi\cdot a^2a^{\frac{1}{3}}-\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\pi(y^3)^2\mathrm{d}y,$$

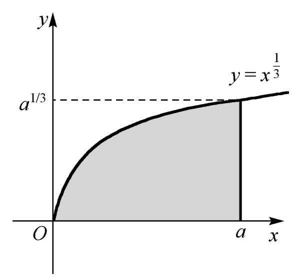


图 1 平面区域

解得$V_y=\pi\cdot a^2a^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{7}\pi\cdot a^{\frac{7}{3}}$，由题设$V_y=10V_x$，可解得$a=7\sqrt{7}$.

（11）（本题满分 10 分）设平面区域 D 由直线 $x=3y$， $y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成，计算 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　如图 2 所示，直线 $x=3y$ 与 $y=3x$ 的交点为 $(0,0)$，直线 $x=3y$ 与 $x+y=8$ 的交点为 $(6,2)$，直线 $y=3x$ 与 $x+y=8$ 的交点为 $(2,6)$.因此

$$\begin{aligned}原式&=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{3x}\mathrm{d}y+\int_2^6 x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}\mathrm{d}y\\&=\frac{8}{3}\int_0^2 x^3\mathrm{d}x+\int_2^6\left(8x^2-\frac{4}{3}x^3\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3}x^4\Big|_0^2+\frac{1}{3}(8x^3-x^4)\Big|_2^6=\frac{416}{3}.\end{aligned}$$

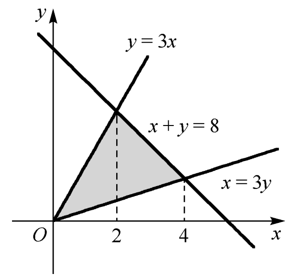


图 2　平面区域

（12）（本题满分 10 分）设生产某商品的固定成本为 60 000 元，可变成本为 20 元/件，价格函数为 $p=60-\dfrac{Q}{1000}$（ p 是单价，单位：元；Q 是销售量，单位：件）．已知产销平衡，求：

①该商品的边际利润；

②当 $p=50$ 时的边际利润，并解释其经济意义；

③使得利润最大的定价 p .

解　①成本函数和收益函数分别为

$$C=C(Q)=60000+20Q,\quad R=R(Q)=pQ=60Q-\frac{1}{1000}Q^2,$$

因此利润函数为

$$L=L(Q)=R(Q)-C(Q)=-\frac{1}{1000}Q^2+40Q-60000,$$

故该商品的边际利润为

$$L'(Q)=-\frac{1}{500}Q+40 .$$

②当 $p=50$ 时， $Q=10000$， $L'(10\,000)=20$．经济意义为：当销售量为 10 000 件时，再多销售一件产品时所获得的利润为 20 元.

③令 $L'(Q)=0$，解得 $Q=20\,000$，且 $L''(Q)=-\dfrac{1}{500}<0$，因此当 $Q=20\,000$ 时，利润达到最大，此时 $p=40$.

（13）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导， $f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$．证明：

①存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$；

②对①中的 a，存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

证　①由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$，根据极限的性质可知，存在 $b>0$，使得 $f(b)>1$，又因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，从而 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上连续，由题设 $f(0)=0$，根据连续函数的介值定理可知，存在 $a\in(0,b)$，使得 $f(a)=1$.

②**证法 1**　构造辅助函数$\phi(x)=f(x)-\dfrac{1}{a}x$，显然$\phi(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且

$$\phi(0)=f(0)-0=0，\ \phi(a)=f(a)-1=0，$$

根据罗尔定理可知，至少存在一点$\xi\in(0,a)$，使得$\phi'(\xi)=0$，而$\phi'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{a}$，故有$f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$成立.

证法 2　因为$f(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，根据拉格朗日中值定理可知，存在一点$\xi\in(0,a)$，使得

$$f(a)-f(0)=f'(\xi)(a-0)，$$

由$f(0)=0$，$f(a)=1$可知，$f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$，结论得证.

2014年考研数学三高等数学考题

（1）设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,且 $a \neq 0$，则当 n 充分大时有（　　）.

（A）$|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$　　（B）$|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$　　（C）$a_n > a - \dfrac{1}{n}$　　（D）$a_n < a + \dfrac{1}{n}$

解　根据数列极限的定义，对于 $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$．由于

$$|a| - |a_n| \leqslant \big||a_n| - |a|\big| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon,$$

从而有 $|a_n| > |a| - \varepsilon$，取 $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$，则 $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$，故选项 A 正确．若取 $a_n = a - \dfrac{1}{n}$ 或 $a_n = a + \dfrac{1}{n}$，显然满足题设条件，因此选项 C 和选项 D 错误.

（2）下列曲线中有渐近线的是（　　）.

（A）$y = x + \sin x$　　（B）$y = x^2 + \sin x$

（C）$y = x + \sin\dfrac{1}{x}$　　（D）$y = x^2 + \sin\dfrac{1}{x}$

解　正确答案为选项 C；利用渐近线的定义容易验证只有曲线 $y = x + \sin\dfrac{1}{x}$ 存在斜渐近线 $y = x$.

（3）设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$．当 $x \to 0$ 时，若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列选项中错误的是（　　）.

（A）$a = 0$　　（B）$b = 1$　　（C）$c = 0$　　（D）$d = \dfrac{1}{6}$

解　正确答案为选项 D．利用麦克劳林展开，当 $x \to 0$ 时，有

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

从而

$$p(x) - \tan x = a + (b-1)x + cx^2 + \left(d - \frac{1}{3}\right)x^3 + o(x^3).$$

由题设可知，当 $x \to 0$ 时，$p(x) - \tan x = o(x^3)$，因此 $a = 0$，$b = 1$，$c = 0$，$d = \dfrac{1}{3}$.

本题也可以使用洛必达法则进行求解．由于 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，故

$$\lim_{x\to 0} \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 - \tan x}{x^3} = 0.$$

由于分母的极限为 0，因此可推知 $\lim\limits_{x\to 0}(a + bx + cx^2 + dx^3 - \tan x) = 0$，解得 $a = 0$．由洛必达法则可知

$$\lim_{x\to 0} \frac{b + 2cx + 3dx^2 - \sec^2 x}{3x^2} = 0,$$

类似地，可推知$\lim\limits_{x\to 0}(b+2cx+3dx^2-\sec^2 x)=0$，解得$b=1$．因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+2cx+3dx^2-\sec^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2cx+3dx^2-\tan^2 x}{3x^2}=0,$$

整理得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2c}{3x}+d-\frac{\tan^2 x}{3x^2}\right)=0,$$

因此$c=0$，$d=\dfrac{1}{3}$．

（4）设函数$f(x)$具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间$[0,1]$上（　　）.

（A）当$f'(x)\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant g(x)$

（B）当$f'(x)\geqslant 0$时，$f(x)\leqslant g(x)$

（C）当$f''(x)\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant g(x)$

（D）当$f''(x)\geqslant 0$时，$f(x)\leqslant g(x)$

解　正确答案为选项D．本题考查了曲线凹凸性的概念．当$f''(x)\geqslant 0$时，曲线$f(x)$为凹的，如图3所示．

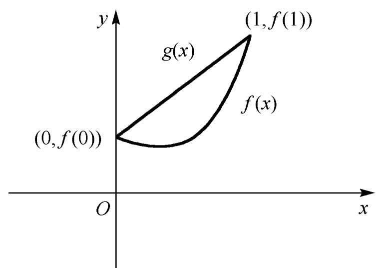


图3　$f(x)$的图形

曲线$y=g(x)$为连接点$(0,f(0))$和$(1,f(1))$的直线段，根据凹凸性的定义，显然有$f(x)\leqslant g(x)$．

注：本题也可以利用辅助函数方法．构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x,$$

由于

$$F(0)=F(1)=0,\quad F''(x)=f''(x),$$

因此当$f''(x)\geqslant 0$时，$F(x)$在区间$[0,1]$上是凹的，因此当$x\in[0,1]$时，有$F(x)\leqslant F(0)=F(1)=0$，从而有$f(x)\leqslant g(x)$．

（5）设某商品的需求函数为$Q=40-2P$（P为商品的价格），则该商品的边际收益为________.

解　由于收益

$$R=pQ=\frac{40-Q}{2}\cdot Q=20Q-\frac{1}{2}Q^2,$$

因此$R'(Q)=20-Q$，故该商品的边际收益为$20-Q$．

（6）设D是由曲线$xy+1=0$与直线$y+x=0$及$y=2$围成的有界区域，则D的面积为________.

解法 1　如图 4 所示，$xy+1=0, y+x=0, y=2$ 的 3 个交点坐标分别是 $(-2,2)$，$\left(-\frac{1}{2},2\right)$，$(-1,1)$．

区域 D 可以分为一个直角三角形和一个曲边三角形，故面积

$$S=\frac{1}{2}+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left[2-\left(-\frac{1}{x}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+(2x+\ln|x|)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

解法 2　$D=\left\{(x,\ y)\middle|1\leqslant y\leqslant 2, -y\leqslant x\leqslant -\frac{1}{y}\right\}$，则

$$S=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}y\int_{-y}^{-\frac{1}{y}}\mathrm{d}x=\int_1^2\left(-\frac{1}{y}+y\right)\mathrm{d}y=\left(-\ln y+\frac{y^2}{2}\right)_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2\,.$$

（7）设 $\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$，则 $a=$________.

解　由于

$$\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^a x\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^a-\frac{1}{2}\int_0^a\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a\mathrm{e}^{2a}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2a}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

解得 $a=\frac{1}{2}$．

（8）二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x=$________.

解　如图 5 所示，二次积分的积分区域为

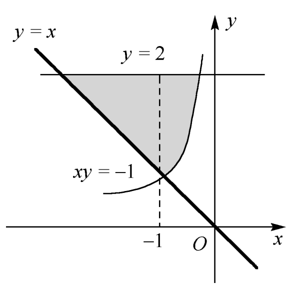


图 4　积分区域

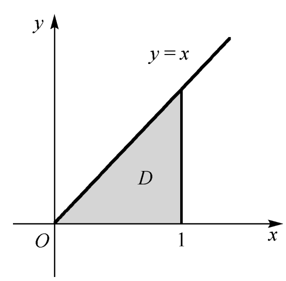


图 5　积分区域

$$D=\{(x,\ y)|0\leqslant y\leqslant 1, y\leqslant x\leqslant 1\}=\{(x,\ y)|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x\}.$$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}y-\int_0^1\mathrm{e}^{y^2}(1-y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y+\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}(y^2)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)\,.\end{aligned}$$

（9）（本题满分 10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

解 根据等价无穷小量替换公式，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x}.$$

记 $f(t)=t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t$，当 $t\to+\infty$ 时，根据泰勒展开，有

$$f(t)=t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t=t^2\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right]-t=\frac{1}{2}+o(1),$$

因此，根据广义积分的几何意义可知

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t=\infty,$$

故结合洛必达法则，有

$$\text{原极限}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]}{1}=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-x\right]=\frac{1}{2}.$$

注：本题在使用洛必达法则时，应该首先验证该题是否适用洛必达法则的条件，即是否属于 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 类型.

（10）（本题满分 10 分）设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，计算 $\iint\limits_D\dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 积分区域如图 6 所示，令 $x=r\cos\theta$， $y=r\sin\theta$，则

$$\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\cdot\int_1^2 r\sin(\pi r)\mathrm{d}r.$$

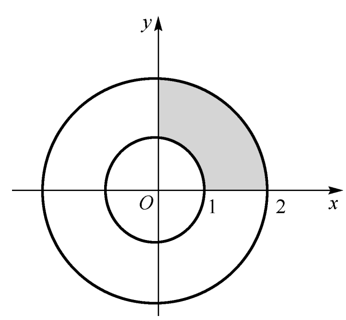


图 6 积分区域

若记 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta$，令 $t=\dfrac{\pi}{2}-\theta$，则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\sin t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta,$$

故

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2},$$

从而 $I=\frac{\pi}{4}$. 又因为

$$\int_1^2 r\sin(\pi r)\mathrm{d}r=-\frac{1}{\pi}\int_1^2 r\mathrm{d}\cos(\pi r)=-\frac{1}{\pi}\left[r\cos(\pi r)\Big|_1^2-\int_1^2\cos(\pi r)\mathrm{d}r\right]=-\frac{3}{\pi},$$

因此

$$\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{4}.$$

(11)(本题满分 10 分)设函数 $f(u)$ 具有连续导数，且 $z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足

$$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x.$$

若 $f(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

解　由题意

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x\cos y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x(-\sin y),$$

所以等式 $\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x$ 化为

$$f'(\mathrm{e}^x\cos y)=4f(\mathrm{e}^x\cos y)+\mathrm{e}^x\cos y,$$

即有 $f'(u)=4f(u)+u$，整理为一阶线性非齐次方程的标准形式为

$$f'(u)-4f(u)=u,$$

解得方程的通解为

$$f(u)=C\mathrm{e}^{4u}-\frac{1}{4}u-\frac{1}{16},$$

又因为 $f(0)=0$，解得 $C=\frac{1}{16}$，故 $f(u)=\frac{1}{16}\mathrm{e}^{4u}-\frac{1}{4}u-\frac{1}{16}$.

(12)(本题满分 10 分)求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域和函数.

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)}\right|=1,$$

因此级数的收敛半径 $R=1$，根据级数收敛的必要条件可知，当 $x=\pm1$ 时，级数均发散，故级数的收敛域为 $(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$，则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)+(n+1)(n+2)]x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'+\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''$$

$$=\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{3-x}{(1-x)^3},\ x\in(-1,1)\ .$$

（13）（本题满分 10 分）设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)$ 单调递增，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$．证明：

① $0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a$, $x\in[a,b]$；

② $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

证 ①当 $x\in[a,b]$ 时，函数 $g(t)$ 在 $[a,x]$ 上使用积分中值定理，则至少存在一点 $\xi\in[a,x]$，使得

$$\int_a^x g(t)\mathrm{d}t=g(\xi)(x-a)\ ,$$

又因为 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$，因此

$$0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t=g(\xi)(x-a)\leqslant x-a\ ,$$

结论①得证.

②构造辅助函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t-\int_a^{a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t} f(u)\mathrm{d}u\ ,$$

当 $x\in(a,b)$ 时，

$$F'(x)=f(x)g(x)-f\left(a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right)g(x)\geqslant f(x)g(x)-f(a+x-a)g(x)=0\ ,$$

且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，因此 $F(b)\geqslant F(a)=0$，结论②得证.

2015 年考研数学三高等数学考题

（1）设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是（　　）.

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

解　根据数列极限与子数列极限之间的关系可知，选项 D 不正确．　例如

$$x_n = \begin{cases} a+\dfrac{1}{n}, & n = 3k, 3k-1, \\ n^2, & n = 3k-2, \end{cases}$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在.

（2）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其二阶导函数 $f''(x)$ 的图形如图 7 所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为（　　）.

（A）0　　　　（B）1　　　　（C）2　　　　（D）3

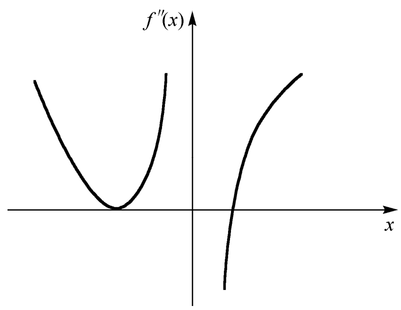


图 7　二阶导函数图形

解　正确答案为选项 C．可能的拐点要么满足 $f''(x)=0$，要么满足 $f''(x)$ 不存在，本题中共有 3 个点有可能为拐点，根据拐点的定义，在该点两侧的曲线满足 $f''(x)$ 异号，因此拐点恰有 2 个.

（3）设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 2x, x^2+y^2 \leqslant 2y\}$，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$（　　）.

（A）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$

（B）$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$

（C）$2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$

（D）$2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

解 正确答案为选项 B；积分区域如图 8 所示.

方程 $x^2+y^2=2x$ 在极坐标系下化为：$r=2\cos\theta$，方程 $x^2+y^2=2y$ 在极坐标系下化为：$r=2\sin\theta$，积分区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leqslant 2x, x^2+y^2\leqslant 2y\}$ 在极坐标系下化为两部分的和：

$$D_1=\left\{(r,\theta)\big|0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\},$$

$$D_2=\left\{(r,\theta)\big|0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta, \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

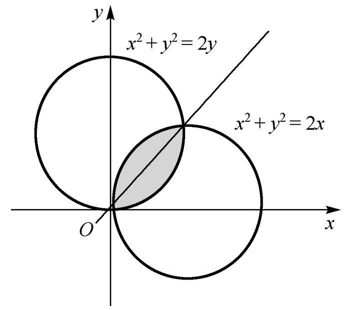


图 8 积分区域

因此

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r .$$

（4）下列级数中发散的是（ ）.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ （B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

（C）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$ （D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

解 利用反证法．假设 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$ 收敛，由莱布尼茨判别法易知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ 收敛，根据级数的性质可知，级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$$

收敛．事实上，$\frac{1}{n}<\frac{1}{\ln n}$，而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，根据正项级数比较判别法知，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散，矛盾．从而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$ 发散.

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=$________.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$.

（6）设函数 $f(x)$ 连续，$\phi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t$ ．若 $\phi(1)=1,\phi'(1)=5$，$f(1)=$________.

解　由于 $\phi(x)=x\cdot\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t$，因此 $\phi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t+2x^2\cdot f(x^2)$，由

$$\phi(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=1,\quad \phi'(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+2f(1)=5,$$

解得 $f(1)=2$.

（7）若函数 $z=(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=$________.

解法 1　方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 两边分别对 x,y 求偏导得到

$$\mathrm{e}^{x+2y+3z}(x+2y+z)'_x+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

即

$$\mathrm{e}^{x+2y+3z}\left(1+3\frac{\partial z}{\partial x}\right)+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

同法可得

$$\mathrm{e}^{x+2y+3z}\left(2+3\frac{\partial z}{\partial y}\right)+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

将 $x=0,\ y=0$ 代入原方程求得 $z=0$，从而解得 $\frac{\partial z}{\partial x}\big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3},\frac{\partial z}{\partial y}\big|_{(0,0)}=-\frac{2}{3}$，故

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}\mathrm{d}y=-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y.$$

解法 2　方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 两边同时取全微分得

$$\mathrm{d}\mathrm{e}^{x+2y+3z}+\mathrm{d}(xyz)=0,$$

因此

$$\mathrm{e}^{x+2y+3z}\mathrm{d}(x+2y+3z)+xy\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=0,$$

即

$$\mathrm{e}^{x+2y+3z}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z)+xy\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=0.$$

将 $x=0,\ y=0$，$z=0$ 代入上式，即可得到

$$\mathrm{d}z=-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y.$$

注：本题考查的是求二元复合函数 $z(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的微分，常用微分公式 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$ 求之，为此先用复合函数求偏导数求出 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$. 此外还可以利用全微分形式的不变性进行求解.

（8）设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3，则 $y(x)=$________.

解　特征方程为 $r^2+r-2=0$，解得特征根为 $r=1$，$r=-2$，因此微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}.$$

又因为在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3，故有 $y(0)=3$， $y'(0)=0$．由此得

$$C_1+C_2=3,\quad C_1-2C_2=0,$$

解得 $C_1=2$， $C_2=1$，故 $y(x)=2\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-2x}$.

（9）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$, $g(x)=kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

解　当 $x\to 0$ 时，有

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

因此当 $x\to 0$ 时，有

$$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x=(a+1)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3).$$

由于当 $x\to 0$ 时， $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，故

$$a+1=0,\quad b-\frac{a}{2}=0,\quad \frac{a}{3}=k,$$

解得 $a=-1$， $b=-\dfrac{1}{2}$， $k=-\dfrac{1}{3}$.

（10）（本题满分 10 分）计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2, y\geqslant x^2\}.$$

解　积分区域如图 9 所示，

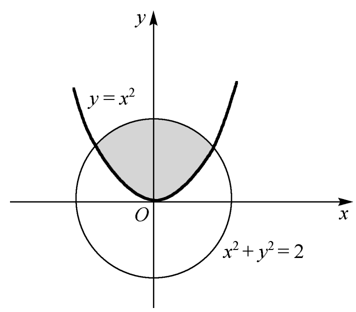


图 9　积分区域

由于积分区域关于 y 轴对称， $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ ，故

$$\text{原式}=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}x^2\mathrm{d}y=2\int_0^1 x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x-\frac{2}{5}=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t-\frac{2}{5}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t\mathrm{d}t-\frac{2}{5}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t-\frac{2}{5}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$$

注：在二重积分计算中利用对称性可以简化计算.

（11）（本题满分 10 分）为了实现利润最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型．设 Q 为该商品的需求量， p 为价格， MC 为边际成本， η 为需求弹性 $(\eta>0)$.

①证明定价模型为 $p=\dfrac{\mathrm{MC}}{1-\dfrac{1}{\eta}}$ ；

②若该商品的成本函数为 $C(Q)=1600+Q^2$ ，需求函数为 $Q=40-p$ ，试由①中的定价模型确定此商品的价格.

解　①收益函数为 $R=R(Q)=pQ$，因此边际收益为

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=p+Q\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}Q}=p\left(1+\frac{Q}{p}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}}\right),$$

又因为需求弹性 $\eta=-\frac{p}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}$，因此边际收益函数为 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=p\left(1-\frac{1}{\eta}\right)$. 为使利润达到最大，需满足 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=\mathrm{MC}$，即 $p\left(1-\frac{1}{\eta}\right)=\mathrm{MC}$，从而定价模型为

$$p=\frac{\mathrm{MC}}{1-\frac{1}{\eta}}.$$

②由题设，$\mathrm{MC}=C'(Q)=2Q$，$\eta=-\frac{p}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{40-p}$，从而由①可知

$$p=\frac{\mathrm{MC}}{1-\frac{1}{\eta}}=\frac{2Q}{1-\frac{40-p}{p}}=\frac{2(40-p)}{1-\frac{40-p}{p}},$$

解得 $p=30$.

（12）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于 0．若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式.

解　曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

切线与 x 轴的交点为 $\left(x_0-\frac{f'(x_0)}{f(x_0)},0\right)$，由题意，

$$\frac{1}{2}\left|x_0-\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}-x_0\right|\cdot|f(x_0)|=4,$$

解得 $f'(x_0)=\frac{1}{8}f^2(x_0)$，由 x_0 的任意性可知，函数 $y=f(x)$ 满足微分方程

$$y'=\frac{1}{8}y^2,$$

解得 $-\frac{8}{y}=x+C$，由条件 $f(0)=2$ 可知，$C=-4$，因此 $y=\frac{8}{4-x}$，$x\in I$.

（13）（本题满分 10 分）

①设函数 $u(x),v(x)$ 可导，利用导数定义证明：$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

②设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

解　①因为 $u(x),v(x)$ 可导，因此根据导数的定义，有

$$u'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\text{，}\quad v'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\text{，}$$

因此

$$\begin{aligned}[u(x)v(x)]'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\\&=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\text{ .}\end{aligned}$$

② $f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$ 的导数为：

$$f'(x)=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)\text{ .}$$

2016 年考研数学三高等数学考题

（1）设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导数如图 10 所示，则（　　）.

（A）函数有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

（B）函数有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点

（C）函数有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点

（D）函数有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

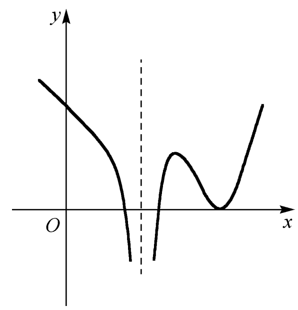


图 10　$f(x)$ 的导数图形

解　由图形可知，正确答案为选项 B.

（2）已知函数 $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-y}$，则（　　）.

（A）$f_x'-f_y'=0$　　（B）$f_x'+f_y'=0$

（C）$f_x'-f_y'=f$　　（D）$f_x'+f_y'=f$

解　由于 $f_x'=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-y-1)}{(x-y)^2}$，$f_y'=\dfrac{\mathrm{e}^x}{(x-y)^2}$，所以 $f_x'+f_y'=f$．故正确答案为选项 D.

（3）设 $T_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (i=1,2,3)$，其中 $D_1=\{(x,y)\big|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，$D_2=\{(x,y)\big|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\}$，$D_3=\{(x,y)\big|0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1\}$，则（　　）

（A）$T_1<T_2<T_3$　　（B）$T_3<T_1<T_2$

（C）$T_2<T_3<T_1$　　（D）$T_2<T_1<T_3$

解　由二重积分的几何意义，容易得知正确答案为选项 B.

（4）级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$，$k$ 为常数，则级数（　　）.

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛

（C）发散　　（D）收敛性与 k 有关

解　由题意

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}\sin(n+k)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+k)}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})},\end{aligned}$$

而

$$\left|\frac{\sin(n+k)}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}<\frac{1}{2n\sqrt{n}},$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛，根据正项级数的比较判别法得，该级数绝对收敛．正确答案为选项 A.

（5）已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

解 由

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=2,$$

且分母的极限为 0，可推知分子的极限为 0，从而有 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)\sin 2x]=0$．根据等价无穷小量替换公式，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\cdot\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\cdot x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{3}=2,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$．

（6）极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\ldots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$________.

解 根据定积分的定义，有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\sin\frac{i}{n}=\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\mathrm{d}\cos x=\sin 1-\cos 1.$$

（7）设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$

________.

解 方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边分别关于 x,y 求导得

$$z+(x+1)z_x'=2xf(x-z,y)+x^2f_1'(x-z,y)\cdot(1-z_x'),$$

$$(x+1)z_y'-2y=x^2[f_1'(x-z,y)\cdot(-z_y')+f_2'(x-z,y)],$$

将 $x=0,y=1,z=1$ 代入如上两式，得 $z_x'(0,1)=-1$，$z_y'(0,1)=2$，故 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$．

（8）设 $D=\{(x,y)\,|\,|x|\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1\}$，则 $\iint\limits_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

解 如图 11 所示，

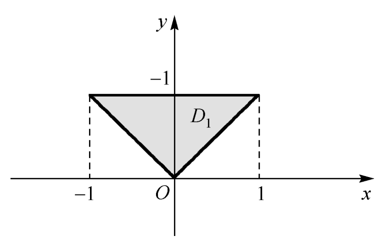


图 11　积分区域

记 $D_1=\{(x,y)\,|\,x\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1\}=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant y\}$，根据对称性

$$\iint\limits_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1\mathrm{e}^{-y^2}y^3\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{e}^{-y^2}y^2\mathrm{d}(y^2)=\frac{1}{3}\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(1-2\mathrm{e}^{-1}).$$

（9）（本题满分 10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

解法 1　利用泰勒展开．当 $x\to 0$ 时，

$$\cos 2x+2x\sin x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+2x\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)+o(x^4)=1+\frac{1}{3}x^4+o(x^4),$$

因此

$$原式=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln[\cos 2x+2x\sin x]}{x^4}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1+\frac{1}{3}x^4+o(x^4)-1}{x^4}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}.$$

解法 2　利用洛必达法则，有

$$原式=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln[\cos 2x+2x\sin x]}{x^4}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}.$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}&=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x+\sin x+x\cos x}{2x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos 2x+\cos x+\cos x-x\sin x}{6x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos 2x+\cos x}{3x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x-\sin x}{6x}-\frac{1}{6}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 2x-\cos x}{6}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

因此，原式 $=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

（10）（本题满分 10 分）设某商品的最大需求量为 1200 件，该商品的需求函数 $Q=Q(p)$ ，需求弹性 $\eta=\dfrac{p}{120-p}(\eta>0)$ ， p 为单价（万元），

①求需求函数的表达式；

②求 $p=100$ 万元时的边际收益，并说明其经济意义．

解　①由弹性的计算公式得，

$$\eta=-\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{120-p}.$$

分离变量可知 $\dfrac{\mathrm{d}Q}{Q}=\dfrac{\mathrm{d}p}{p-120}$ ，两边同时积分得 $\ln Q=\ln(p-120)+C$ ，解得

$$Q=C(p-120).$$

由题意，最大需求量为 1200，即 $Q(0)=1200$ ，解得 $C=-10$ ，故

$$Q=-10(p-120)=1200-10p.$$

②由①知，$p=120-\dfrac{1}{10}Q$，因此收益函数为

$$R=Qp=120Q-\frac{1}{10}Q^2 .$$

从而边际收益为

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=120-\frac{1}{5}Q .$$

当 $p=100$ 时，$Q=200$，从而 $\left.\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{p=100}=80$．经济学意义是每多销售 1 件产品，收益增加 80 万元．

（11）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)=\int_0^1\left|t^2-x^2\right|\mathrm{d}t\ (x>0)$，求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值．

解 当 $|x|<1$ 时，

$$f(x)=\int_0^{|x|}(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t+\int_{|x|}^1(t^2-x^2)\,\mathrm{d}t=\frac{4}{3}|x|^3-x^2+\frac{1}{3} .$$

当 $|x|\geqslant 1$ 时，$f(x)=\int_0^1(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t=x^2-\dfrac{1}{3}$.

故

$$f(x)=\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{3}, & x\leqslant -1,\\ -\dfrac{4}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3}, & -1<x<0,\\ \dfrac{4}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x^2-\dfrac{1}{3}, & x\geqslant 1. \end{cases}$$

当 $x\neq -1$，$x\neq 0$，$x\neq 1$ 时，有

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x<-1,\\ -4x^2-2x, & -1<x<0,\\ 4x^2-2x, & 0<x<1,\\ 2x, & x>1. \end{cases}$$

由导数的定义可知，

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-1}{x+1}=-2 ,$$

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{-\dfrac{4}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3}-\left(1-\dfrac{1}{3}\right)}{x+1}$$

$$=-\lim_{x\to -1^+}\frac{4x^3+3x^2+1}{3(x+1)}=-\lim_{x\to -1^+}\frac{12x^2+6x}{3}=-2 ,$$

故 $f'(-1)=-2$．同理可得 $f'(0)=0, f'(1)=2$．故

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & x\leqslant -1,\\ -4x^2-2x, & -1<x<0,\\ 4x^2-2x, & 0\leqslant x<1,\\ 2x, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

由于 $f(x)$ 是偶函数，所以只需求它在 $[0,+\infty)$ 上的最小值即可．当 $x\in(0,+\infty)$ 时，令 $f'(x)=0$，解得唯一驻点 $x=\dfrac{1}{2}$．当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，因此函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处取得极小值，也是最小值．最小值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$．

（12）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 连续，且满足

$$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1,$$

求 $f(x)$ 的表达式．

解　令 $u=x-t$，则

$$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,$$

从而原方程化为

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1.$$

由于 $f(x)$ 连续，可知 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 可导．上式两边对 x 求导得

$$f(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{-x},$$

即有

$$f(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{-x}.$$

对上式两边再求导可得 $f'(x)=f(x)+\mathrm{e}^{-x}$，因此函数 $y=f(x)$ 满足如下一阶线性微分方程

$$y'-y=\mathrm{e}^{-x}.$$

从而

$$\begin{aligned}y&=\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=\left[\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{\int(-1)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int(-1)\mathrm{d}x}\\&=\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C\right)\mathrm{e}^{x}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}+C\mathrm{e}^{x}.\end{aligned}$$

由等式 $f(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{-x}$ 可知，当 $x=0$ 时，可得 $f(0)=-1$，$C=-\dfrac{1}{2}$，因此

$$f(x)=-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}).$$

（13）（本题满分 10 分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域和和函数.

解 令 $u_n(x)=\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+4}\cdot(n+1)(2n+1)}{(n+2)(2n+3)x^{2n+2}}\right|=x^2,$$

所以当 $x^2<1$，即 $-1<x<1$ 时，幂级数绝对收敛；当 $x=\pm1$ 时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)}$，根据正项级数的比较判别法可知，级数收敛；因此幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$. 当 $x\in(-1,1)$ 时，两边同时求导得

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+2)x^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

上式两边同时再求导得

$$S''(x)=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}.$$

由题意，$S(0)=0$，$S'(0)=0$. 从而

$$S'(x)=S'(0)+\int_0^x\frac{2}{1-x^2}\mathrm{d}x=\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

$$\begin{aligned}S(x)&=S(0)+\int_0^x\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x=x\ln\frac{1+x}{1-x}-\int_0^x x\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'\mathrm{d}x\\&=x\ln\frac{1+x}{1-x}-\int_0^x\frac{2x}{1-x^2}\mathrm{d}x=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2)\\&=(x+1)\ln(x+1)+(1-x)\ln(1-x).\end{aligned}$$

因为级数在 $x=-1$ 处收敛，因此 $S(x)$ 在 $x=-1$ 右连续，故

$$\begin{aligned}S(-1)&=\lim_{x\to-1^+}S(x)=\lim_{x\to-1^+}\left[(x+1)\ln(x+1)+(1-x)\ln(1-x)\right]\\&=\lim_{x\to-1^+}[(x+1)\ln(x+1)]+\lim_{x\to-1^+}[(1-x)\ln(1-x)]\\&=2\ln2+\lim_{t\to0^+}t\ln t=2\ln2+\lim_{t\to0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}\\&=2\ln2+\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}=2\ln2-\lim_{t\to0^+}t=2\ln2.\end{aligned}$$

类似地，级数在 $x=1$ 处收敛，因此 $S(x)$ 在 $x=1$ 左连续，故

$$
\begin{aligned}
S(-1) = \lim_{x\to 1^-} S(x) &= \lim_{x\to 1^-}\left[(x+1)\ln(x+1)+(1-x)\ln(1-x)\right] \\
&= \lim_{x\to -1^+}[(x+1)\ln(x+1)] + \lim_{x\to -1^+}[(1-x)\ln(1-x)] \\
&= 2\ln 2 + \lim_{t\to 0^+} t\ln t = 2\ln 2 .
\end{aligned}
$$

综上可得，级数的和函数为

$$
S(x)=\begin{cases}(x+1)\ln(x+1)+(1-x)\ln(1-x), & -1<x<1, \\ 2\ln 2, & x=\pm 1.\end{cases}
$$